UNIVERSIDADE DE LISBOA

A Noção de Segunda Derivada e suas aplicações: um estudo no 12º ano

Cristiana Vanessa Sousa Coito

Mestrado em Ensino de Matemática

Relatório da Prática de Ensino Supervisionada orientado pela Professora Doutora Ana Cláudia Correia Batalha Henriques e coorientado pelo Professor Doutor Pedro Jorge Santos Freitas

2016

Resumo

Este estudo, realizado no âmbito da prática de ensino supervisionada, tem por base a lecionação de 5 aulas, numa turma do 12.º ano da Escola Secundária da Ramada, abrangendo as unidades curriculares "Cálculo Diferencial" (ME, 2002), "Derivada de segunda ordem, extremos, sentido das concavidades e pontos de inflexão" e "Aplicação do cálculo diferencial à resolução de problemas" (MEC, 2014). O objetivo do estudo é analisar a compreensão que os alunos do 12.º ano evidenciam da 2ª derivada de uma função e as dificuldades que manifestam na sua aplicação na resolução de tarefas que a envolvem. Deste modo procurei responder a 3 questões: (1) Como os alunos interpretam a noção de 2ª derivada de uma função e que dificuldades manifestam quando a determinam, em diferentes representações? (2) Como os alunos relacionam a 2ª derivada de uma função com a função original? Que dificuldades revelam? (3) Que estratégias e conhecimentos os alunos mobilizam, na resolução de problemas de otimização que envolvem a 2ª derivada de uma função? Quais as principais dificuldades que manifestam?

Os resultados apresentados têm por base uma análise qualitativa dos dados recolhidos a partir da observação participante, apoiada em notas de campo e complementada com gravação vídeo e da recolha documental, constituída pelas produções escritas dos alunos nas tarefas propostas ao longo da UE.

Os resultados obtidos sugerem que as interpretações de 2ª derivada identificadas dizem respeito ao sentido da concavidade da função original que os alunos associam ao sinal da 2ª derivada e aos pontos de inflexão da função original que associam aos valores em que a 2ª derivada se anula, embora compreendam que o anulamento da 2ª derivada não obriga a que esse ponto seja de inflexão na função original. Evidenciam também compreender a relação entre a 2ª derivada e a sua função original e mostram ser capazes de relacioná-las a nível gráfico, algébrico e numérico. Relativamente aos problemas de otimização, os alunos mobilizaram conhecimento sobre a 2ª derivada de funções, pontos de inflexão, quadros de sinais e concavidades, para os resolver sendo a estratégia mais utilizada o cálculo da 2ª derivada para concluírem sobre o sentido das concavidades e pontos de inflexão da função original. As dificuldades mais difíceis de ultrapassar foram as concetuais que, nalguns casos, se mantiveram até ao final da UE.

Palavras-chave: Segunda Derivada; Problemas de otimização; Dificuldades dos alunos; Ensino secundário.

Abstract

This study, carried out as a supervised teaching practice, is based on the work developed while teaching 5 lessons, in a 12^{th} grade class of the Escola Secundária da Ramada, covering the curricular units of "Differential calculus" (ME, 2002), "Second order derivative, extremes, sense of concavity and inflection points" and "Applying differential calculus to problem solving" (MEC, 2014). The objective of this study is to analyse 12^{th} grade students' understanding of the 2^{nd} derivative of a function and the difficulties they reveal regarding its application in the resolution of tasks involving this concept. Therefore, I tried to answer the three following questions: (1) How do students interpret the notion of 2^{nd} derivative of a function and what difficulties do they reveal when they determine it, in different representations? (2) How do students relate the 2^{nd} derivative of a function with their original function? What difficulties do they reveal? (3) What strategies and knowledge do students mobilize in solving optimization problems involving the 2^{nd} derivative of a function? What are the main difficulties expressed by the students?

The results presented are based on a qualitative analysis of the data gathered from participant observation, supported by field notes and complemented with video recording and from documental collection of the students' written resolutions of the proposed tasks.

Based on the results, I concluded that interpretation of the 2^{nd} refer to the concavity sign of the original function, which students associated to the sign of the 2^{nd} derivative and to the inflection points of the original function, which they associated to values where the 2^{nd} derivative is zero, although they reveal understanding that a point with a null 2^{nd} derivative does not require that this point corresponds to an inflection point on the original function. They also understood the relationship between the 2^{nd} derivative and its original function and showed the ability to relate them in graphic, algebraic and numerical representations. Regarding optimization problems, students mobilized knowledge about the second derivate, inflection points and concavities to solve them and the most common strategy used was the calculation of the 2^{nd} derivative and the use of a signal table to draw conclusions about the concavity sign and the inflection points of the original function. The hardest difficulties to overcome were the conceptual ones, which, in several cases, remained till the end of the teaching unit.

Keywords: Second Derivative; Optimization problems; Students' difficulties; Secondary.

Agradecimentos

Após terminar esta longa caminhada, sinto necessidade de agradecer a um conjunto de pessoas, que tornou possível a realização deste trabalho, mostrando-lhes assim a minha gratidão.

À minha orientadora, Professora Doutora Ana Henriques, um obrigado pela paciência, orientação e críticas construtivas. A Professora apoio todo o meu percurso e demonstrou-se sempre disponível para me ajudar. Obrigada!

Ao meu coorientador, Professor Doutor Pedro Freitas, um obrigado pelos conselhos respeitantes ao formalismo matemático deste trabalho e pelos desafios matemáticos que ia lançando para me motivar. Obrigada!

À minha professora cooperante, Inês Campos, um obrigado pelo apoio, pela confiança que depositou em mim logo desde o início, pela motivação que me deu quando pensei que ia fracassar, por atender sempre os meus telefonemas para dar-me força e pela amizade. A professora é uma grande mulher e uma excelente profissional, tanto a nível de conhecimentos como de dinâmica com os alunos. Ensinou-me, acima de tudo, que temos de ser nós próprios, os primeiros a acreditar no nosso trabalho. Eu adorava quando me deixava lecionar as aulas e nunca me vou esquecer desses momentos. A professora deu-me muita confiança e vontade de ser professora. Obrigada!

À minha turma, 12.º E, um obrigada por me terem recebido tão bem, me desafiarem todos os dias, por quererem saber sempre mais. Esse vosso espírito curioso, excelente comportamento e dedicação, tornou a minha experiência maravilhosa. Não podia ter pedido uma turma melhor, porque não existe. Desejo-vos muita sorte para o futuro académico e estou aqui para vos ajudar no que for necessário. Obrigada!

Ao meu colega Manuel Patrício, um obrigado pelo companheirismo, ajuda informática e por todos os telefonemas que me atendias para me ajudares. Fazer esta caminhada acompanhada por ti, tornou-se mais divertida. Obrigada!

À Leonor Rosa, um obrigado pelo ambiente divertido lá de casa. Quando entristecia, reconfortavas-me com palavras de coragem e com nuttela. Obrigada!

À Joana Estevens, um obrigado pela grande amizade, pela paciência, pelo apoio, pelos conselhos sábios e pela excelente companhia. Sei que és uma amiga para a vida e não podia deixar de te agradecer todos os momentos partilhados ao longo desta caminhada de 5 anos. És uma excelente amiga. Obrigada!

Finalmente, tive de guardar uma página para as 4 pessoas mais importantes da minha vida e, mesmo assim, vocês sabem que todas as palavras que vou escrever são poucas para vos agradecer da forma como merecem. Dedico-vos este trabalho!

Aos meus pais, um obrigado por terem tornado o meu sonho possível. Sempre acreditaram que ia conseguir, mesmo quando eu própria duvidei. Eu não podia escolher uns pais melhores, porque não existem. Devo-vos tudo o que alcancei até hoje.

À minha mãe, um obrigado por todos os telefonemas que atendias só para me ouvir desabafar, pela paciência, por todos os dias em que me aconselhaste a descontrair para não enlouquecer com a enorme carga de trabalho, por toda a ajuda com as tarefas domésticas, que nem sempre tinha tempo para realizar e por toda a motivação e apoio que me deste. És uma grande mulher, uma excelente mãe e, acima de tudo, és um exemplo a seguir pela tua força de viver. Obrigada mãe querida!

Ao meu pai, um obrigado por todos os esforços que tens feito para eu poder estar aqui hoje, pela paciência, por todas as viagens a Lisboa que fizeste para tornar a minha estadia mais confortável, por todas as vezes que trazias almoço para eu poder ficar a estudar, por todo o apoio e motivação que me deste e, não podemos esquecer, por todos os chocolates que me compraste para eu aguentar a pressão do trabalho. És um grande homem e um excelente pai e a qualidade que mais invejo tua é a calma. E nos momentos em que eu não consegui manter a minha calma, tu deste-me a tua. Obrigada pai querido!

Ao Marco, um obrigado por todo o apoio, amor e carinho que me deste neste percurso de 5 anos, por todas as palavras meigas, por todos os chocolates e pela paciência. Embora eu não tenha sido sempre a melhor companhia, devido à pressão do trabalho, tu nunca me deixaste desistir e deste-me sempre confiança e força para continuar. Estudar longe de casa é complicado, mas contigo ao pé de mim, tudo se tornou mais fácil. Tu foste melhor amigo, companheiro e em ti encontrei uma força incansável e um apoio incondicional para terminar esta caminhada. Obrigada Marco!

À Diana, um obrigado por todos os sorrisos, pelo apoio, carinho, chocolate, pela calma que me proporcionaste e por todas as vezes que vinhas de propósito almoçar a casa para me fazer companhia. Tu estiveste sempre presente, tanto de noite como de dia, eras a minha companhia de 24 horas e isso deu-me forças para continuar. Sabes que és a minha princesa e sempre o serás e, tenho imensa sorte em ter-te ao meu lado. Para além de irmã, és a minha melhor amiga e, sem ti, não teria conseguido. Obrigada irmã querida!

Estou-vos eternamente grata por tudo. Um grande obrigado a estas 4 pessoas maravilhosas, sem as quais a minha conquista não teria tanto sabor!

Índice

Índice de figuras

Índice de Tabelas

Índice de Anexos

Capítulo 1

Introdução

O estudo que apresento foi desenvolvido no âmbito do Mestrado em Ensino de Matemática e tem como base a intervenção letiva que realizei numa turma do 12.º ano da Escola Secundária da Ramada, no 2º período do ano letivo de 2015/16, na unidade curricular "Cálculo Diferencial" do tema "Introdução ao Cálculo Diferencial II", do programa de Matemática A em vigor (ME, 2002). Como a Escola pretende começar a orientar o ensino para o novo programa e metas curriculares de Matemática A do ensino secundário (MEC, 2014), a minha intervenção integrou também o tema "Funções Reais de Variável Real", nas unidades curriculares "Derivada de segunda ordem, extremos, sentido das concavidades e pontos de inflexão" e "Aplicação do cálculo diferencial à resolução de problemas".

Neste capítulo introdutório começo por apresentar as motivações que me levaram à realização deste estudo e a sua pertinência para depois descrever, também, o seu objetivo e as questões de investigação que lhe serviram de base.

1.1. Motivações e pertinência do estudo

Como qualquer investigação acarreta consigo os valores e interesses do seu autor, penso que faz todo o sentido começar por referir que sou uma apaixonada por Matemática desde que me lembro, sendo que foi na escola primária que comecei a dizer que queria ser professora de Matemática. Obviamente que nessa altura ninguém acreditou porque "ensinar bem matemática é uma tarefa complexa e não existem receitas fáceis" (NCTM, 2008, p.18) mas aqui estou eu, a concretizar o meu grande sonho!

Este meu gosto pela Matemática não parecia ser unânime em nenhuma das turmas que frequentei ao longo do meu percurso escolar. Para mim, "saber Matemática pode ser satisfatório a nível pessoal e constituir uma forma de poder, porque os conhecimentos básicos necessários à vida quotidiana possuem, cada vez mais, um carácter matemático" (NCTM, 2008, p.4). Por isso, enquanto para mim, aprender matemática era um prazer para os meus colegas era aborrecido, porque os alunos que memorizam procedimentos sem os compreenderem têm, muitas vezes, dúvidas sobre como usar aquilo que aprenderam e essa aprendizagem revela-se, bastante frágil (Bransford, Brown, & Cocking, 1999).

Além disso, a minha experiência de alguns anos como explicadora, também me forneceu uma visão geral das dificuldades dos alunos do 12.º ano nos temas abordados nesse nível de ensino. Por exemplo, de uma maneira geral, os alunos mostram competência procedimental para levar a cabo complexas regras de derivação, mas falta-lhes a compreensão dos conceitos subjacentes ao estudo da Análise. Segundo Ponte (1992), as noções de função e sua derivada são as fundações da Análise Matemática, pelo que possuir um conhecimento sólido nesta temática e compreender o conceito de derivada é essencial, quer para um bom desempenho dos alunos a nível universitário, quer como pré-requisito para as disciplinas científicas que utilizam a Matemática como ferramenta no dia-a-dia (Almeida & Viseu, 2002). Portanto, quando me foi dada a oportunidade de escolher um tópico do tema “Introdução ao Cálculo Diferencial II” para realizar a minha intervenção letiva, atendendo às restrições de ser favorável realizá-la no 2.º período letivo e do tempo a dedicar às unidades curriculares, optei pelas derivadas. Além disso, nesta unidade de ensino, os alunos exploram a primeira e a segunda derivada de diversas funções, as suas aplicações e os problemas de otimização, ampliando os seus conhecimentos prévios sobre estas temáticas, os quais têm tido pouca atenção nos estudos realizados no âmbito dos Relatórios de Prática de Ensino Supervisionada, trazendo-me uma responsabilidade acrescida.

Atendendo a que "os professores são os principais protagonistas na mudança dos processos pelos quais a Matemática é ensinada e aprendida nas escolas" (NCTM, 1994, p.2), considero que, enquanto futura professora, preciso de ajudar os alunos a compreenderem melhor a Matemática que lhes é ensinada e a ultrapassarem as suas dificuldades. Para isso, é essencial perceber de que forma os alunos compreendem os conceitos matemáticos, que significados lhes atribuem e como é que estas noções se vão desenvolvendo, desde o momento em que são introduzidas.

Para que os alunos realizem aprendizagens significativas é importante realizar, em sala de aula, “tarefas matemáticas valiosas com potencial para proporcionar aos alunos aprendizagens matemáticas sofisticadas, que vão além da aplicação de conceitos e treino de procedimentos” (Canavarro, 2011, p.16). Dado que o conceito de derivada de uma função tem-se evidenciado de difícil compreensão pelos alunos (Almeida & Viseu, 2002) e atendendo ao reconhecido papel educativo dos problemas (Ponte, 2005), no ensino deverá ser dada bastante atenção à compreensão da noção de segunda derivada em problemas de aplicação. A intervenção letiva e o estudo de cariz investigativo que realizei nesta temática constituem, assim, uma boa oportunidade para aprender a colocar em prática estas ideias e para apresentar aos alunos uma visão diferente da Matemática.

1.2. Objetivo e questões de investigação

Atendendo ao exposto, pretendo neste estudo analisar qual a compreensão que os alunos do 12.º ano evidenciam da noção de segunda derivada de uma função e as dificuldades que manifestam na sua aplicação na resolução de tarefas que a envolvem. Tendo em conta estes objetivos e para me orientar no estudo, formulei as seguintes questões:

1. Como os alunos interpretam a noção de 2ª derivada de uma função e que dificuldades manifestam quando a determinam, em diferentes representações?
2. Como os alunos relacionam a 2ª derivada de uma função com a função original? Que dificuldades revelam?
3. Que estratégias e conhecimentos os alunos mobilizam, na resolução de problemas de otimização que envolvem a 2ª derivada de uma função? Quais as principais dificuldades que manifestam?

Capítulo 2

Enquadramento curricular e didático

Neste capítulo faço um enquadramento teórico ao tema da unidade didática em que realizei a minha intervenção letiva, dando especial atenção à aprendizagem da derivada de uma função e às dificuldades dos alunos com esta noção, evidenciadas na literatura. Depois abordo as representações matemáticas, atendendo ao seu contributo para a aprendizagem dos conceitos matemáticos abordados na unidade didática. Por último, dedico alguma atenção à resolução de problemas envolvendo a noção de segunda derivada.

2.1. Derivada de uma função

2.1.1. O conceito de derivada

Atualmente, "a necessidade de compreender e de ser capaz de usar a matemática na vida quotidiana, e no local de trabalho, nunca foi tão premente" (NCTM, 2007, p.4), pelo que os professores deverão dar atenção à compreensão dos conceitos lecionados. Mas para isso é essencial perceber de que forma os alunos compreendem os conceitos matemáticos, que significados lhes atribuem e como é que estas noções se vão desenvolvendo, desde o momento de introdução destes conceitos.

Nos últimos anos, vários autores refletiram sobre a problemática da construção dos conceitos matemáticos. De entre as várias abordagens, vou dar destaque ao trabalho de David Tall e Shlomo Vinner sobre o conceito definição e o conceito imagem, dado que esses termos são centrais na explicação do processo cognitivo da formação dos conceitos para os autores supramencionados.

A construção de conceitos acompanha-nos ao longo da vida e começa com a nossa própria vida, ou seja, desde que nascemos que "quando vemos ou ouvimos o nome de um conceito ele produz um estímulo no nosso cérebro, suscitando algo na nossa memória" (Domingos, 2003, p.27). Porém, frequentemente não se trata de uma definição no sentido usual, mas sim aquilo que Vinner designa por conceito imagem (Tall e Vinner, 1981; Vinner, 1983, 1991). Por exemplo, quando somos novos e nos questionam se queremos comer um gelado ou andar de baloiço nós imaginamos automaticamente um gelado ou um baloiço, como uma imagem em si e não como o conjunto de palavras que os definem. Assim, o conceito imagem é algo não verbal associado na nossa mente ao nome do conceito (Domingos, 2003), como no caso do gelado.

Para além de possuirmos uma representação visual do conceito, também podemos possuir uma coleção de impressões e experiências (Domingos, 2003), como por exemplo andar de montanha russa. Neste caso, quando ouvimos as palavras "montanha russa" não obtemos uma imagem estática, mas sim um conjunto de imagens, uma experiência, uma sensação. Além disso, estes conceitos imagem vão crescendo e alteram-se com a "experiência e a reflexão" (Tall, 2001, p. 4) vividas pelo sujeito, o que significa que os conceitos imagens que adquirimos na nossa infância vão-se moldando ao longo dos anos.

O conceito definição é a definição verbal que explica o conceito de modo exato e de uma forma não circular (Vinner, 1983). Por exemplo, se dissermos aos alunos para pensarem na equação quadrática, muitos formarão o conceito $y = x^2$, ao invés da representação gráfica que lhe está associada. Desta forma, o conceito está definido de modo exato e não restam dúvidas sobre o que estamos a tratar.

Porém, Vinner (1991) acredita que se só apresentarmos a definição aos alunos, estes nunca conseguirão visualizar/imaginar esta equação num gráfico. Isto é, o autor defende que para adquirir um conceito precisamos formar um conceito imagem e um conceito definição do mesmo, dado que o conhecimento apenas do último não nos garante a compreensão do conceito.

Apesar do que referi acima, também existem alguns conceitos para os quais possuímos em simultâneo um conceito definição e um conceito imagem, como é o exemplo do conceito flor. Por um lado, conseguimos imaginar uma flor, sem recorrermos à definição, mas por outro, também o conseguimos definir caso seja necessário, como sendo a estrutura reprodutora característica das plantas. O que acontece neste caso é que o conceito foi adquirido por meio de uma imagem, aquando na nossa infância e, mais tarde, por meio de uma definição, ou seja, fomos completando o conceito através da nossa experiência vivida.

Ainda segundo o mesmo autor, o conceito definição aparece como suporte para a construção do conceito imagem e este, uma vez construído, pode dispensar o conceito definição nalgumas situações, isto é, o conceito definição não é crucial para a construção de todos os conceitos. Portanto, existem alguns conceitos que podem ser introduzidos por meio da definição, ajudando a formar o conceito imagem e existem outros que podem ser introduzidos por meio de uma imagem e se quisermos podemos, posteriormente, defini-los.

Sabemos que no nosso ensino, frequentemente as definições dos conceitos são introduzidas antes de termos algum conceito imagem, esperando que a nossa aprendizagem futura preencha esta lacuna. Segundo Vinner (1983), os professores ao ensinarem um conceito esperam que o conceito imagem se forme por meio do conceito definição, porém, quando os alunos começam a estudar "conceitos mais avançados, a definição deve ser introduzida como o último critério das várias tarefas matemáticas" (Domingos, 2003, p. 33), o que, frequentemente não se verifica.

No caso particular do ensino das derivadas, o conceito é frequentemente introduzido por meio de uma definição, a qual os alunos decoram e a imagem permanece vazia. Isto porque, quando a definição é memorizada sem lhe atribuirmos nenhum significado, o conceito imagem não chega a ser preenchido e, por isso, não desenvolvemos uma compreensão completa sobre o conceito de derivada. Assim, seria benéfico um equilíbrio entre a utilização destes dois conceitos (imagem e definição) para uma melhor compreensão do conceito de derivada.

Contudo, segundo os autores Tall e Vinner (1981), os conceitos imagem e definição podem entrar em conflito um com o outro, quando algum deles não foi bem compreendido, denominando-se esta situação por fator potencial de conflito. Para Domingos (2003), nos conceitos em geral, é possível encontrar partes do conceito imagem que entram em conflito com o conceito definição formal. Estes conflitos não são desejados, uma vez que podem causar dificuldades ao lidar com conceitos mais formais, impedindo uma melhor aprendizagem. Por exemplo, a definição de um número complexo $a + bi$ como um par ordenado de números reais (a, b) e a identificação de $a + 0 \times bi = (a, 0)$ como o número real a, é um fator de conflito potencial no conceito de número complexo. Isto acontece porque ele insere um conflito potencial com a noção formal de que o elemento a é distinto do par ordenado $(a, 0)$.

O conceito de derivada é bastante complexo na aprendizagem da Matemática porque, não só é necessária abstração para o compreender, como os processos de representação que lhes estão associados dificultam esta compreensão (Orhun, 2012). E dado que o conceito de derivada é difícil a nível concetual, o professor deve ter em atenção os conceitos imagens formados pelos alunos, a forma como os aborda e deve evitar os fatores potenciais de conflito referidos anteriormente. Isto porque é necessário que os alunos conheçam algumas definições formais destes conceitos, atingindo um equilíbrio na utilização dos conceitos definição e imagem das derivadas, para uma melhor compreensão das mesmas (Domingos, 2003).

Segundo Sierpinska (citada em Domingos, 2003), a compreensão tem sido confundida com o conhecer, uma vez que as instituições têm tendência de desenvolver o conhecimento em detrimento do pensamento, acrescentando que o compreender tem sido esquecido no ensino atual. Deste modo, a autora afirma que compreensão é uma "atividade cognitiva que tem lugar após longos períodos de tempo" (Sierpinska, 1994, p. 2). A autora define ainda "atos de compreensão" como uma experiência mental que ocorre ao longo do tempo e que é muito rápida e, consequentemente, defende que a compreensão é algo potencial para experimentar um ato de compreensão quando necessário.

Para Skemp (1978), os alunos podem apresentar duas formas de compreensão dos conceitos matemáticos: compreensão instrumental ou compreensão relacional. Segundo o autor, a compreensão instrumental diz respeito à aquisição de regras e à capacidade de as usar na resolução de problemas, privilegiando-se o saber como, sem saber porquê. O objetivo desta compreensão instrumental é procurar uma regra que permita responder satisfatoriamente a um problema. Por outro lado, a compreensão relacional assenta no princípio do saber como, e ao mesmo tempo, no porquê, permitindo não só perceber o procedimento, mas também o porquê. Esta compreensão relacional facilita a resolução de novos problemas.

2.1.2. Tratamento curricular do conceito

No programa de Matemática (MEC, 2014), pretende-se que os alunos sejam capazes de relacionar o sinal da derivada de segunda ordem com pontos de inflexão e concavidades do gráfico de funções duas vezes diferenciáveis, estudar graficamente funções diferenciáveis e resolver problemas envolvendo propriedades de funções diferenciáveis. Ainda segundo o programa, o professor deve tentar diversificar as representações utilizadas para o conceito derivada e deve proporcionar aos alunos problemas onde eles tenham que aplicar conhecimentos sobre derivadas.

As pesquisas de Krutetskii (1976, citado em Haciomeroglu, Aspinwall, & Presmeg, 2010) mostram que um aluno que tenha um pensamento mais analítico baseia-se precisamente em processos analíticos e acaba por se apoiar pouco em processos visuais e, por outro lado, um aluno que tenha um pensamento mais visual baseia-se pouco em processos analíticos. Logo, segundo o autor é essencial que o professor não remeta as aprendizagens de conceitos matemáticos para uma mecanização de procedimentos e que, no contexto de resolução de problemas, realce o significado dos conceitos matemáticos envolvidos.

Segundo Dreyfus (1990, citado em Domingos, 2003), os alunos do secundário aprendem procedimentos de cálculo, isto é, calculam limites e derivadas a um nível maioritariamente algorítmico que, muitas vezes, é construído sobre conceitos imagens muito pobres. Para este autor, a visualização é rara e quando o professor tenta estabelecer a ligação cognitiva entre as representações gráfica e algébrica, os alunos têm grandes dificuldades. Portanto, como a representação gráfica de um conceito matemático pode assumir um papel muito importante numa perceção mais completa do mesmo, o professor deve promover esta capacidade de visualização nos alunos, na sua prática pedagógica (Vasques, 2015).

Também Aspinwall (1994) salientou a importância do ensino focado nas representações gráficas e analíticas de funções e derivadas. Um estudo realizado pelo autor, com alunos do ensino secundário, indica que os alunos a quem foram ensinados apenas regras e procedimentos, aquando do ingresso na universidade, faltavam-lhes a capacidade de analisar gráficos e uma compreensão dos fundamentos concetuais de declive e de reta tangente. O autor acrescentou ainda que o estudo das representações gráficas de funções e suas derivadas tinham o potencial de produzir uma compreensão mais rica daquela que era alcançada apenas por estudos analíticos.

Em suma, o professor deve tentar que os alunos estabeleçam conexões entre os conceitos, relacionando todas as suas representações, em vez de apenas aprenderem regras, tornando a sua aprendizagem mais significativa (Vasques, 2015).

2.2. Representações de funções

Após ter refletido sobre os conceitos imagem e definição e a sua centralidade na compreensão do conceito de derivada de uma função, faz sentido discutir as representações utilizadas para auxiliar essa compreensão.

A partir da sua definição de compreensão e das componentes que lhe estão subjacentes, Sierpinska (citada em Domingos, 2003) afirma que as representações surgem como tendo um papel primordial na compreensão, isto é, as representações são elementos fundamentais para a compreensão dos conceitos. Também no NTCM (2007) se defende que "as representações deverão ser tratadas como elementos essenciais no apoio à compreensão, por parte dos alunos, dos conceitos" (p.75) e, como tal, é necessário que “à medida que os alunos se tornam matematicamente mais competentes, vão desenvolvendo um repertório cada vez maior de representações matemáticas e de como as usar de forma produtiva” (p. 422). Este repertório de representações fornece-lhes a possibilidade de optar por aquela que mais se adequa à resolução de um problema, tornando-se assim mais eficazes na resolução destes.

Mais ainda, os programas de ensino do pré-escolar ao 12.º ano deverão habilitar todos os alunos para compreender relações e funções, e selecionar, converter umas nas outras e usar várias representações. No ensino secundário, no Programa de Matemática A (ME, 2002), no estudo das funções e no cálculo diferencial, é muito valorizada a combinação das representações algébrica, gráfica e numérica dos problemas.

Mas então a que é que se refere cada representação? A representação algébrica refere-se aos símbolos matemáticos que são utilizados para definir a função e as suas propriedades; a representação gráfica refere-se às formas e propriedades dos gráficos de funções; a representação numérica refere-se ao uso de valores numéricos, muitas vezes dispostos numa tabela (Kendal & Stacey, 2003).

Para além destas representações mais comuns, Duval (1995) considera também a representação simbólica, que engloba a representação algébrica. Segundo o autor, a representação simbólica refere-se aos símbolos matemáticos, figuras e à linguagem natural.

Para autores como Consciência e Oliveira (2011) ou Aspinwall, Shaw e Presmeg (1997), as representações desempenham um papel crucial na compreensão dos conceitos e, em particular, a compreensão do conceito de derivada de uma função dificilmente é atingido sem o recurso a várias representações.

Segundo Orhun (2012), a visualização na aprendizagem matemática, por exemplo, a interpretação gráfica tornou-se cada vez mais importante nos dias de hoje. Porém, a aptidão para operar com símbolos algébricos também é importante, na medida em que a capacidade de reescrever expressões algébricas permite aos alunos expressarem as funções sob formas que realcem os seus diferentes tipos de informação, consoante o que pretendem. Deste modo, o desenvolvimento desta destreza exige uma relação de equilíbrio entre a compreensão de conceitos e a competência algébrica e o professor deverá ajudar os alunos a compreender que, diferentes representações poderão revelar-se mais ou menos adequadas, dependendo do que cada um pretende estudar (NCTM, 2007).

Apesar de o Programa de Matemática A (ME, 2002) recomendar uma exploração gráfica de um problema, os “procedimentos analíticos são os mais valorizados (…), sendo os conceitos inerentes à derivada de uma função transmitidos de uma forma desligada da sua componente gráfica, e sem qualquer análise crítica da importância dos seus significados" (Almeida & Viseu, 2002, p. 194). Contudo, alguns autores argumentam que uma compreensão gráfica pode contribuir para que sejam esquecidos aspetos analíticos essenciais dos conceitos (Aspinwall et al., 1997).

Assim, e juntando as duas opiniões, alguns autores como Carvalho, Ferreira e Ponte (2011) referem a importância no estabelecimento de ligações entre essas diferentes representações para que os alunos compreendam verdadeiramente o significado dos conceitos e para tornar a sua aprendizagem mais significativa, ou seja, um equilíbrio entre as representações supramencionadas é benéfico para uma melhor compreensão do conceito de derivada.

Deste modo, é importante percebermos que as diferentes representações podem contribuir para uma melhor compreensão de muitos conceitos matemáticos, nomeadamente o de função derivada, uma vez que "a aquisição do conhecimento matemático processa-se, fundamentalmente, através de representações e modelos" (Almeida e Viseu, 2002, p. 195). Também o Programa de Matemática em vigor tem alertado para a importância das diferentes representações, dado que os gráficos transmitem certo tipo de informação visual, enquanto as expressões simbólicas poderão ser mais facilmente manipuladas, analisadas e transformadas, ou seja, diferentes representações poderão transmitir diferentes informações, pelo que as representações deverão ser tratadas como elementos essenciais no apoio à compreensão dos conceitos (NCTM, 2007, p.75).

2.3. Dificuldades dos alunos na compreensão do conceito de derivada e nas representações

Num estudo realizado por Orton (1983), o autor concluiu que a maioria dos alunos, com idades compreendidas entre os 16 e os 22 anos, não sente grande dificuldade na aplicação das regras de derivação, mas aquando da interpretação/conceptualização geométrica do limite, evidenciam dificuldades e, por esse motivo, o conceito de derivada não pode ser compreendido concetualmente, tendo de existir uma abordagem complementar para uma melhor aprendizagem. Também pesquisas de Orhun (2012) mostram que, para os alunos do 11.º ano de escolaridade, muitas vezes o conceito de derivada está associado às regras de derivação e que não conseguem interpretar o gráfico da função derivada, isto é, eles sentem dificuldade em estabelecer conexões entre o gráfico da função derivada com o da função original, acabando por interpretar o gráfico da função derivada como um gráfico de função real de variável real. O mesmo autor levanta a hipótese de esta falta de compreensão do conceito de derivada poder estar associada ao método de ensino, nomeadamente, um ensino que fornece mais destaque à resolução algébrica do que à resolução gráfica.

Infelizmente, muitos estudantes focam-se na aprendizagem dos procedimentos e não na compreensão do seu significado e na forma como estes podem ser aplicados, não atribuindo qualquer significado aos conceitos aprendidos (Swanagan, 2012). Este desinteresse dos estudantes pela compreensão acarreta prejuízos para as suas aprendizagens, visto que a maior parte do que é ensinado no currículo tradicional é esquecido pelos alunos após terminarem os seus estudos, enquanto que grande parte do que é aprendido em contexto é lembrado por mais tempo (Steen, 1998, citado em Domingos, 2003). Deste modo a aprendizagem das derivadas através da memorização e da definição torna-se complicada e sem aplicação na vida real (Orhun, 2012).

Segundo Cabral (2015), na maior parte dos casos, o significado que os alunos do 11.º ano de escolaridade tendem a desenvolver para a derivada de uma função está relacionado com a sua aplicabilidade num determinado tipo de tarefa, como por exemplo, em problemas de otimização. Embora alguns alunos também consigam desenvolver um significado geométrico da derivada de uma função num ponto, a compreensão deste significado geométrico, por parte dos alunos, possui lacunas. Assim, a autora conclui que os alunos desenvolvem uma compreensão sobretudo instrumental da derivada de uma função e tendem a desenvolver apenas um significado para este conceito matemático.

Outro estudo realizado por Gil (2014) também chegou a conclusões semelhantes, sustentando que outros alunos, do mesmo nível de escolaridade, utilizam a derivada de uma função como uma ferramenta para resolver certo tipo de exercícios e problemas, revelando uma compreensão instrumental da noção de derivada de uma função. Ainda neste estudo, os alunos evidenciam "conhecer o procedimento associado ao estudo de variação de uma função, através do sinal da sua derivada, evidenciando também, (…) uma utilização deste conceito centrada nas regras e procedimentos" (p. 114).

Segundo Vasques (2015) é pouco frequente pedir-se aos alunos que façam interpretações geométricas das derivadas de uma determinada função e, talvez seja por isso que eles não consigam determinar a reta tangente à curva de uma função num dado ponto a partir de uma representação gráfica da mesma. Ou seja, o conceito imagem do conceito de derivada estabelecido pelos alunos é limitado, uma vez que não conseguem estabelecer a relação da derivada num ponto, para a função derivada representada graficamente, encarando-a apenas como uma expressão algébrica (Vasques, 2015).

Segundo um estudo de Habre e Abboud (2006), muitos alunos falham quando lhes é pedido que definam derivada geometricamente. Estes autores referem ainda que esta dificuldade é "uma consequência do facto das definições matemáticas serem tradicionalmente analíticas, criando um obstáculo ao raciocínio dos alunos" (p. 68).

Heid (1988) realizou um estudo para descobrir as dificuldades dos alunos na compreensão do conceito de derivada, os erros cometidos pelos mesmos e os efeitos do uso de computador nesta temática. Ao longo deste estudo, para além de dificuldades já mencionadas, o autor identificou ainda que os alunos não utilizam a linguagem correta para descrever o gráfico da função derivada e que não relacionam os conceitos presentes num problema.

Em síntese, os erros e dificuldades que os alunos revelam no conceito de derivada são diversos e incluem a correta interpretação/concetualização geométrica do limite, a associação do conceito a regras de derivação, a interpretação gráfica da função derivada, a utilização correta da linguagem para descrever o gráfico da função derivada, o foco na aprendizagem dos procedimentos e não na compreensão do significado do conceito e na forma como estes podem ser aplicados. Para além disto, os autores referidos concluem que os alunos desenvolvem uma compreensão sobretudo instrumental da derivada de uma função e tendem a desenvolver apenas um significado para este conceito matemático, evidenciando dificuldades quando lhes é pedido que definam derivada geometricamente.

Após analisar as dificuldades dos alunos na compreensão do conceito de derivada, vou, agora, analisar as dificuldades que possuem na interpretação das diversas representações.

O estudo realizado por Gil (2014), com alunos do 11.º ano de escolaridade, destaca como dificuldades neste tópico, as fragilidades dos alunos ao nível da manipulação algébrica, a tradução da linguagem matemática para a linguagem corrente e reciprocamente e a abstração, visualização e interpretação da representação gráfica de uma função. Segundo a autora, os alunos quando obtêm resultados erróneos, aquando da manipulação algébrica, não possuem espírito crítico, para avaliar se a solução encontrada é, ou não, adequada ao problema, encarando a solução fora do contexto.

Como é sabido, o nosso ensino privilegia as abordagens algébricas no ensino da Matemática e Vinner (1989, citado em Almeida & Viseu, 2002) justifica essa predominância pelo facto de a prova visual não ser considerada, frequentemente, uma prova matemática. Além disso, os professores evitam usar argumentos visuais porque requerem ainda preparação de algum suporte computacional e porque consideram que o argumento analítico é mais exato e que não exige grandes explicações, tornando-se mais fácil de ensinar e é também aquele que corresponde ao que os alunos esperam encontrar numa prova matemática (Almeida & Viseu, 2002). Assim, é expectável que os alunos possuam mais dificuldades na interpretação da representação gráfica, pois é a menos abordada.

Outros autores como Eisenberg e Dreyfus (1991, citados em Almeida & Viseu, 2002) apontam que a razão de os alunos não recorrerem à visualização é de natureza cognitiva e está relacionada com a quantidade, complexidade e concentração de informação explícita numa representação visual e implícita na representação analítica. Zimmermann (1991) defende que a componente visual é tão fundamental para compreender conceitos matemáticos que é difícil ter sucesso sem nunca "enfatizar nos elementos visuais desses conceitos" (p. 136).

Em síntese, as dificuldades que os alunos evidenciam na interpretação das diferentes representações estão associadas às fragilidades dos alunos ao nível da manipulação algébrica, à tradução da linguagem matemática para a linguagem corrente e reciprocamente e à abstração, visualização e interpretação da representação gráfica de uma função. Mais especificamente, os autores acima apresentados concluem que os alunos possuem dificuldades na interpretação da representação gráfica, uma vez que é menos abordada e que os alunos preferem representações analíticas ao invés de visuais, porque nas representações visuais a quantidade, complexidade e concentração de informação está mais explícita, enquanto que numa representação analítica encontra-se mais implícita.

Relativamente à resolução de problemas de otimização, as principais dificuldades que os alunos manifestaram relacionam-se com o seu contexto. Segundo Cabral (2015), os alunos mostram desconsiderar a importância de resolver e responder ao problema de acordo com o contexto apresentado, tanto nos procedimentos como na resposta final. Para além disso, os alunos revelam também algumas dificuldades de interpretação no que se refere a problemas não equacionados. Para Kieran (2007), no contexto dos problemas de otimização, a passagem da linguagem natural para a algébrica é difícil para a maioria dos alunos, constituindo uma dificuldade na tradução das representações. Por último, segundo Gil (2014), os alunos quando obtêm resultados erróneos, aquando da manipulação algébrica, não possuem espírito crítico, para avaliar se a solução encontrada é, ou não, adequada ao problema, encarando a solução fora do contexto.

2.4. Problemas no contexto das derivadas

Tendo em conta que uma das minhas questões de investigação aborda que estratégias e conhecimentos os alunos mobilizam, na resolução de problemas de otimização que envolvem a 2ª derivada de uma função, dedico esta seção à apresentação dos problemas, no contexto das derivadas.

Os problemas com derivadas são uma excelente forma de fazer a ponte entre os conceitos matemáticos e a sua aplicabilidade na vida prática e, consequentemente, o professor, no contexto de resolução de problemas, deve enfatizar o significado dos conceitos matemáticos envolvidos. Sendo consensual que a resolução de problemas é fundamental no ensino da Matemática, já não o é a definição de problema, por não ser exata nem única, uma vez que depende dos autores e das abordagens que fazem a esta temática. Apesar desta variedade, têm em comum a ideia que um problema é uma questão ou tarefa que nos interessa responder ou realizar, não dispondo previamente de uma estratégia de resolução. Este interesse em responder ou realizar constitui-se num desafio para os alunos. Segundo Pólya, os problemas são essenciais para que os alunos se sintam desafiados e compreendam "a verdadeira natureza da Matemática", além de desenvolverem "o seu gosto por esta disciplina" (Ponte, 2005, p.13). Também Schoenfeld (1985) refere que um problema é como uma meta que um indivíduo pretende atingir, isto é, o aluno sente interesse em realizar e alcançar esta meta.

Por exemplo, Ponte e Sousa (2010) referem que uma questão constituirá um problema ou um exercício para um indivíduo conforme ele disponha, ou não, de um processo que lhe permita responder rapidamente a essa questão. Também Pólya (1980) refere que resolver um problema é encontrar um caminho desconhecido para um alcançar um objetivo concreto, ou seja, não conhecemos nem o ponto de chegada nem o caminho que temos de percorrer.

Assim, "a resolução de problemas implica o envolvimento numa tarefa, cujo método de resolução não é conhecido antecipadamente. Para encontrar a solução, os alunos deverão explorar os seus conhecimentos e através deste processo desenvolvem, com frequência, novos conhecimentos matemáticos" (NCTM, 2007, p.57), por isso, à medida que os alunos vão resolvendo o problema, vão também adquirindo conhecimentos novos. Deste modo, a resolução de problemas é benéfica e deve ser utilizada, sempre que possível, no ensino da Matemática, mas para isso os professores têm de propor bons problemas aos alunos. Os "bons problemas deverão integrar uma variedade de tópicos e envolver matemática significativa" (NCTM, 2007, p.57), uma vez que "(…) proporcionam aos alunos a oportunidade de consolidar e ampliar os seus conhecimentos e, se forem bem escolhidos, podem estimular a aprendizagem matemática" (NCTM, 2007, p.57). Porém, os alunos não nascem com a destreza para resolver problemas sem antes o experimentarem, isto é, os alunos deverão ter oportunidades para formular, discutir e resolver problemas complexos que requeiram um esforço significativo, para se irem habituando a esta prática. Para além disso, em seguida, deverão ser encorajados a refletir sobre os seus raciocínios, de forma a torná-los mais confiantes e críticos na resolução de problemas, como por exemplo, torná-los mais críticos na interpretação da solução no contexto do problema.

Para podermos percorrer esse caminho desconhecido, existem autores que defendem que possuímos um conjunto de estratégias para utilizar, enquanto outros defendem que a estratégia surge aquando da resolução. Por exemplo, Schoenfeld (1985) e Pólya (1957/2004) consideram que existem várias estratégias previamente conhecidas a que o aluno recorre ao deparar-se com um problema, enquanto para Threfall (2002), a estratégia irá emergir tendo em conta as próprias caraterísticas do indivíduo, como conhecimentos e preferências e a forma como este enfrenta o problema. Assim, a estratégia, ao invés de escolhida, será gerada no ato da resolução.

Segundo Roldão (2009), as estratégias utilizadas para resolver um problema têm o intuito de tornar a aprendizagem mais efetiva, visto que os alunos têm que perceber os objetivos de aprendizagem, bem como interessarem-se pelo que estão a produzir e aumentarem a sua confiança e motivação.

O pensamento de Threfall (2002) faz sentido, na medida em que os conhecimentos que os alunos possuem condicionam as estratégias que irão escolher, por exemplo, se um aluno compreender os conceitos que estão implícitos naquele problema irá relacioná-los com os novos conceitos e mais facilmente conseguirá resolvê-lo. Isto porque aprender matemática faz mais sentido e esta é mais facilmente memorizada e aplicada, se os alunos relacionarem o conhecimento novo com o conhecimento prévio, de forma significativa (Schoenfeld, 1988).

Para resolver um problema, Pólya (2004) desenvolveu uma heurística, constituída por quatro etapas, com o objetivo de facilitar a resolução de problemas. São elas: a compreensão do problema, o estabelecimento de um plano, a execução do plano e a análise retrospetiva. Em primeiro lugar é essencial compreender o problema, isto é, entender o que é pedido no enunciado. Em segundo lugar, o aluno deve estabelecer um plano, relacionando os dados do problema que possui e a questão que pretende dar resposta, tentando procurar uma estratégia que permita resolvê-lo. É nesta etapa que o aluno tem de pensar se já resolveu um problema semelhante, que conhecimentos pode aplicar, que tipo de representação é mais conveniente, entre outros fatores que facilitem a organização do pensamento do aluno. Em terceiro lugar, executa-se o plano efetuando cálculos, apresentando os raciocínios e as representações necessárias. Em último lugar, o aluno deve verificar se o plano foi bem executado, isto é, se é possível resolver o problema de outra forma mais eficaz e se a solução encontrada vai ao encontro do que era pedido.

Schoenfeld (1985) identificou um conjunto de heurísticas para cada fase do problema, enunciadas acima. Para a primeira fase, compreender o problema, o autor refere, por exemplo, identificar os dados e a questão e organizar a informação. Para a segunda fase, estabelecer um plano, o autor salienta a tentativa e erro, assumir uma solução, partir do que se sabe e decompor o problema. Na terceira fase, executar o problema, engloba as heurísticas registar os cálculos e usar destrezas computacionais, em particular, a calculadora. Para a última fase, analisar retrospetivamente, são consideradas as de analisar a consistência da solução e apresentar a solução de uma outra forma.

Tal como sugerem estudos de Heirdsfield e Cooper (2004) (citados em Proulx, 2013), o próprio problema e a forma como este é apresentado aos alunos são também fatores essenciais na elaboração da estratégia.

Após ter abordado os problemas em geral, vou agora centrar-me nos problemas de otimização, visto que são parte do meu objetivo de estudo, como referi acima.

Segundo Ferreira (2012), os problemas de otimização são problemas adaptados ao quotidiano e a situações da vida real, permitindo modular e interpretar fenómenos à nossa volta. Deste modo, o autor considera que os problemas de otimização têm também uma grande importância a nível pedagógico, uma vez que são aplicáveis a vários conteúdos da matemática e, mais especificamente, desenvolvem o estudo do cálculo diferencial e permitem trabalhar conceitos relativos a funções, nomeadamente extremos relativos e monotonia da função.

Para Wicklegren (1974), os problemas de otimização são como extensões naturais de problemas cujo objetivo é percorrer o caminho da descoberta do máximo ou do mínimo. O mesmo autor considera ainda que os problemas de otimização são problemas que apresentam dados incompletos, dado que quem os resolve se confronta com restrições e por vezes até tem de perceber que informação utilizar e que informação está em excesso.

Segundo Malaspina e Font (2010), os problemas de otimização têm como objetivo fundamental determinar a solução ótima, neste caso, máximos ou mínimos de uma determinada função que os alunos estejam a estudar.

Segundo Cabral (2015), num estudo realizado sobre problemas de otimização no contexto da função derivada, numa turma de alunos de 11.º ano de escolaridade, alguns alunos utilizam a máquina calculadora para reproduzir a função original, com o intuito de a estudar. Mais do que isto, os alunos com mais dificuldade na disciplina evitam resolver os problemas recorrendo à relação entre o sinal da função derivada, sentido de variação e extremos da função original. A mesma autora afirma ainda que na resolução dos problemas de otimização, as principais dificuldades que os alunos manifestem relacionam-se com o contexto dos mesmos, isto é, os alunos desconsideram a importância de resolver e responder ao problema de acordo com o contexto apresentado.

Deste modo, se utilizarmos a resolução de problemas com frequência e motivarmos os alunos a construírem o seu próprio conhecimento, nomeadamente, na temática da segunda derivada, "ao concluírem o 12.º ano, os alunos deverão ter predisposição, conhecimentos e estratégias que lhes permitam enfrentar os novos desafios que irão encontrar" (NCTM, 2007, p.394).

Capítulo 3

Unidade de Ensino

Este estudo tem por base a minha intervenção letiva numa turma de 12.º ano de escolaridade, na unidade de ensino "Cálculo Diferencial". Neste capítulo começo por apresentar uma caracterização do contexto escolar, de seguida enquadro a unidade de ensino no programa de matemática do ensino secundário em vigor e apresento a sua planificação bem como os conceitos e propriedades matemáticos fundamentais presentes nesta unidade. Descrevo, igualmente, as estratégias de ensino adotadas e os recursos utilizados, particularmente as tarefas propostas em sala de aula. Termino com uma descrição sumária das aulas lecionadas.

3.1. Contexto escolar

3.1.1. Caracterização da escola

A Escola Secundária da Ramada está situada na União das Freguesias de Ramada e Caneças, pertencendo ao concelho de Odivelas. Esta freguesia é constituída por núcleos habitacionais antigos, alguns bairros recentemente construídos e urbanizações, também recentes, e outras em construção, pelo que o núcleo populacional continua em crescimento. Além disso, a Ramada está dotada dos serviços essenciais de utilidade diária aos moradores, e constitui-se como um local atrativo, enquanto destino habitacional, pela sua proximidade a Lisboa. Assim sendo, o meio socioeconómico dos alunos que frequentam esta escola é bastante heterogéneo.

Esta escola abriu as portas à comunidade no dia 24 de novembro do ano letivo de 1980/1981. O seu logótipo, criado pelo professor José Assis, representa uma estilização do seu ex-libris: o Moinho das Covas, o qual constitui um polo turístico da comunidade e onde se realizam algumas festas de fim de ano e alguns almoços organizados pelos professores.

Quanto à sua tipologia, a Escola possui nove pavilhões, com dois pisos cada um, à exceção do Refeitório, do Pavilhão D e do Pavilhão das Artes, que têm somente um piso. No que respeita à tecnologia, esta Escola possui equipamento informático e multimédia em todas as salas de aula, o que possibilita o uso generalizado das Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC) no processo de ensino e de aprendizagem dos alunos. Assim, para melhorar o desenvolvimento da organização educativa, da aprendizagem e avaliação dos alunos, alguns professores realizaram uma formação especializada e contínua para rentabilizar esses recursos materiais e serviços existentes. Para ajudar a colmatar esta necessidade, a escola também desenvolveu uma aposta na formação interna entre pares sobre diferentes temáticas de acordo com as necessidades detetadas, de modo a promover a melhoria do pensamento reflexivo de todos os atores educativos.

No que se refere à procura de soluções e apoios pessoais e socioeconómicos, para o seu desenvolvimento, a Escola conta com o auxílio da Associação de Estudantes, da Associação dos Antigos Alunos e da Associação de Pais e com as parcerias que mantém com entidades públicas e privadas, nomeadamente a Câmara Municipal, a Junta de Freguesia, o Centro Social e Comunitário da Ramada, Instituições de Ensino Superior e diversas outras empresas e organizações, o que constitui uma mais-valia para o enriquecimento formativo dos alunos.

Esta abertura à comunidade e o dinamismo criado ao longo dos anos em áreas curriculares e não curriculares levou a que a Escola tenha sido distinguida com o "Selo Escola Voluntária", prémio atribuído pelo Ministério da Educação e Ciência. Este Selo visa o reconhecimento da promoção de valores de cidadania, de voluntariado e de solidariedade no meio escolar.

Em síntese, a Escola Secundária da Ramada dispõe de edifícios e recursos materiais adequados à sua missão e tem tido um envolvimento relevante com a comunidade.

3.1.2. Caracterização da turma

A turma onde realizei a minha prática de ensino supervisionada foi o 12.º E da Escola Secundária da Ramada. Esta turma é do curso de Ciências e Tecnologias e é constituída por 28 alunos, dos quais 21 são rapazes e 7 são raparigas, sendo que dois dos rapazes estão apenas a assistir à disciplina de Matemática. As suas idades estão compreendidas entre os 16 e 19 anos, sendo que a maioria tem 17 anos e reside na freguesia de Odivelas.

Os alunos têm um percurso escolar regular, dado que a maioria nunca reprovou e todos mostram vontade de ingressar num curso superior, sendo a opção pela engenharia informática a mais referida. De uma forma geral, corroborando a opinião dos professores da turma, nomeadamente a professora cooperante e a diretora de turma, os alunos são bastante participativos e interessados e têm bom comportamento.

O trabalho desenvolvido em sala de aula é bastante produtivo, porque os alunos são bastante autónomos e envolvidos durante o trabalho autónomo e ordeiros na discussão das questões em grande grupo.

Apesar do trabalho desenvolvido pelos alunos em casa ser individual, na sala de aula o trabalho é maioritariamente realizado a pares, o que proporciona a partilha de ideias e facilita o esclarecimento de dúvidas, pois os alunos desenvolveram o hábito de questionar o colega antes de perguntar ao professor presente na sala. Quando as dificuldades permanecem, recorrem aos professores e são críticos em relação à maneira como estes respondem, ou seja, os alunos desta turma não esperam uma resposta do professor, mas uma orientação que lhes permita chegar a ela. Este é um aspeto bastante positivo, sendo que a turma é bastante participativa, interessada, curiosa e os alunos empenham-se bastante para alcançar os objetivos de aprendizagem.

Deste modo, os alunos aproveitam bem as aulas para esclarecerem as suas dúvidas, incluindo as relativas a tópicos anteriormente abordados, ao mesmo tempo que acompanham os novos conteúdos resolvendo as tarefas propostas ao longo dos períodos letivos.

Tendo em conta as informações fornecidas pela professora cooperante Inês Campos, no início do ano letivo e o que tenho vindo a observar ao longo deste ano letivo, existem alguns alunos que requerem uma atenção especial. Existe um aluno com dificuldades socioeconómicas, por isso estou atenta ao caso dele precisar de algum material escolar; outro aluno é tímido e inseguro e necessita de reforço e apoio para confiar nas suas resoluções (por vezes este aluno necessita mesmo que digamos que a resolução dele está correta para conseguir avançar); outro aluno precisa de ser incentivado para iniciar o trabalho autónomo; e outros dois alunos, que possuem as classificações mais baixas (apresentam 9 e 11 valores, respetivamente, do ano letivo anterior) e, por isso, verifico se estão a acompanhar o trabalho desenvolvido em sala de aula, deslocando-me mais frequentemente à mesa deles.

Em termos da utilização de tecnologia, a maioria dos alunos tem e utiliza o computador para estudar em casa. Nas aulas é permitido o uso do telemóvel apenas para consulta das tarefas, evitando assim imprimir folhas desnecessárias. Para além disso, todos os alunos possuem calculadora e utilizam esta ferramenta, tanto em casa como em sala de aula, como auxiliar na resolução dos exercícios.

Em relação às classificações do 1º período, estas encontram-se na tabela abaixo (Tabela I). Como se pode observar, as classificações foram bastante satisfatórias, existindo apenas um aluno com classificação inferior a 10 e 18 alunos (mais de metade da turma) com classificação superior a 14.

Tabela I – Classificações do 1º período

Classificações (valores)	< 10	$10 - 13$	$14 - 17$	$18 - 20$
Nº de alunos	1	7	11	7

Em relação ao 2º período, as classificações obtidas encontram-se na seguinte tabela (Tabela II). Estas, mantém-se bastante satisfatórias, existindo 15 alunos com classificação superior a 14 e 7 alunos com classificações compreendidas entre 17 e 20 valores. A ligeira descida das classificações, na minha opinião pode estar relacionada com a extensão de conteúdos do 2º período, uma vez que os alunos têm de percorrer os conteúdos mais rapidamente e talvez tenham tido menos tempo para refletir sobre o que estavam a aprender.

Tabela II – Classificações do 2º período

Classificações (valores)	< 10	$10 - 13$	$14 - 17$	$18 - 20$
Nº de alunos	1	10	8	7

Em relação ao 3º período, as classificações obtidas encontram-se na seguinte tabela (Tabela III). Como podemos observar, os alunos aumentaram as suas classificações em relação ao período passado, existindo metade deles com notas compreendidas entre o 10 e o 13, aumentando o número de alunos com notas compreendidas entre o 14 e o 17 e, para além disso, um aluno subiu a classificação para o intervalo compreendido entre o 17 e o 20. Esta subida de classificações está relacionada com as classificações boas que os alunos obtiveram no exame nacional.

Tabela III – Classificações do 3º período

Classificações (valores)	< 10	$10 - 13$	$14 - 17$	$18 - 20$
Nº de alunos	1	5	12	8

3.2. Ancoragem da unidade de ensino

A unidade de ensino que lecionei foi “Cálculo Diferencial” do tema “Introdução ao Cálculo Diferencial II” do programa de Matemática A do ensino secundário, em vigor (ME, 2002) no 12.º ano de escolaridade. Como a Escola pretende começar a orientar o ensino para o novo Programa e Metas curriculares de Matemática A do ensino secundário (MEC, 2014), a minha intervenção será também no tema ‘Funções Reais de Variável Real’, nas unidades “Derivada de segunda ordem, extremos, sentido das concavidades e pontos de inflexão” e “Aplicação do cálculo diferencial à resolução de problemas”.

Neste tema é introduzida a derivada de segunda ordem de uma função, o seu sinal num ponto crítico e a identificação de extremos locais e os seus pontos de inflexão e concavidades do gráfico. A resolução de problemas, tema transversal do Programa de Matemática A do ensino secundário (MEC, 2014) também é um tema a abordar no meu relatório, uma vez que o mesmo sugere que os alunos apliquem o cálculo diferencial à resolução de problemas de otimização. Isto é, pretende-se que os alunos resolvam problemas em que o objetivo fundamental é determinar a solução ótima, neste caso, máximos ou mínimos de uma determinada função que estejam a estudar (Malaspina & Font, 2010). O Programa de Matemática A do Ensino Secundário (ME, 2002) refere que o estudo das segundas derivadas e concavidades deve ter por base uma abordagem geométrica. O Programa e Metas de Matemática A do Ensino Secundário (MEC, 2014) pretende que se relacione os extemos de uma função, o sentido das concavidades e os pontos de inflexão com a derivada de segunda ordem, tanto geométrica como algebricamente, através do cálculo do sinal desta última. Pretende ainda uma aplicação do cálculo diferencial à resolução de problemas.

Deste modo, existem alguns conhecimentos prévios que os alunos necessitam de possuir antes de introduzirmos estes conceitos novos, para que consigam compreendê-los. Pelo programa em vigor, a noção de derivada é introduzida no domínio de “Funções Reais de Variável Real”, no 11.º ano de escolaridade. Neste ano, faz-se uma interpretação geométrica da derivada de uma função num dado ponto, estabelecem-se as regras de derivação para a soma, diferença, produto, quociente e composta de funções diferenciáveis, fazendo-se a demonstração por definição de algumas e calcula-se, a partir da definição, a derivada de algumas funções elementares, como é o caso da função afim, das funções polinomiais do 2º e 3º grau, da função racional do 1º grau e da função módulo.

A relação entre o sinal da derivada e a monotonia de uma função é aqui estabelecida invocando-se o Teorema de Lagrange para uma das implicações, embora apenas se exija uma interpretação geométrica desse resultado. Por outro lado, pretende-se que o aluno saiba justificar a propriedade segundo a qual se uma função atinge um extremo num dado ponto em que é diferenciável, então a derivada anula-se nesse mesmo ponto, desde que o mesmo pertença a um intervalo aberto contido no domínio da função.

É somente no 12.º ano que o estudo das derivadas se torna mais completo. Neste ano, estudam-se as derivadas das funções exponencial, logarítmica e trigonométricas e introduz-se a derivada de segunda ordem. Pretende-se que os alunos aprendam a relacionar o sinal da segunda derivada com as concavidades da função original e introduzem-se os pontos de inflexão de uma função. Estes novos conceitos são fundamentais para a resolução de problemas e para o estudo completo de uma função, uma vez que, após a lecionação da segunda derivada e da relação das suas propriedades com as da função original, os alunos passam a ter todos os conhecimentos para estudar analiticamente uma função e para resolverem problemas de otimização.

Os objetivos específicos da unidade que lecionei, foram retirados dos dois programas de Matemática A do ensino secundário, já referidos (ME, 2002; MEC, 2014). Estes objetivos são: compreender a definição de derivada de segunda ordem de uma função e saber representá-la; relacionar o sinal da segunda derivada com a concavidade do gráfico da função original; identificar pontos de inflexão no gráfico da função original e saber que representam o anulamento da sua segunda derivada; estudo das funções utilizando a primeira e a segunda derivadas e resolução de problemas de otimização envolvendo funções diferenciáveis.

Em termos de planeamento, a intervenção letiva que serviu de base a este estudo decorreu no final do 2º período, durante cinco aulas de 90 minutos, enquadrada na planificação de médio e longo prazo da professora cooperante, titular da turma. Para cada uma destas aulas, realizei um plano de aula (ver Anexos 2 ao 7), onde constam os tópicos e subtópicos da aula, os objetivos específicos a alcançar, os conhecimentos prévios dos alunos, as capacidades transversais a desenvolver, os recursos a utilizar, particularmente as tarefas a propor, a avaliação das aprendizagens e o desenvolvimento da aula. Neste desenvolvimento da aula estão presentes os seus diversos momentos, os tempos previstos para cada um deles, as estratégias de resolução e dificuldades previstas dos alunos. Na Tabela IV apresento a planificação das cinco aulas da unidade lecionada, tendo em conta os seus tópicos e subtópicos, os objetivos específicos e as tarefas propostas.

Tabela IV – Planificação da unidade de ensino

Aula e data	Tópicos/Subtópicos	Objetivos	Tarefas
1ª aula 04/03/2016	Derivada de primeira ordem; Quadro de variação, intervalos de monotonia e extremos.	Rever os conhecimentos relativos à primeira derivada de uma função; Relacionar as propriedades da primeira derivada com as da função original, em diferentes representações; Construção de quadros de sinal para estudar a monotonia e os extremos de funções.	Tarefa 1: "Revisão da Primeira Derivada"
2ª aula 08/03/2016	Derivada de segunda ordem; Extremos, sentido das concavidades e pontos de inflexão.	Compreender a segunda derivada em diferentes representações; Relacionar a segunda derivada com a primeira derivada e com a função original, em diferentes representações; Relacionar a segunda derivada com as concavidades e pontos de inflexão do gráfico da função original; Aplicar a segunda derivada na resolução de exercícios.	Tarefa 2: "Segunda Derivada"
3ª aula 09/03/2016	Derivada de segunda ordem; Extremos, sentido das concavidades e pontos de inflexão.	Construção de quadros de sinal para estudar a concavidade de funções; Compreender a segunda derivada em diferentes representações; Relacionar as propriedades da segunda derivada com as da primeira derivada e com as da função original, em diferentes representações; Mobilizar o conhecimento das propriedades da segunda derivada na resolução de exercícios.	Tarefa 3: "Aplicação da Segunda Derivada"
4ª aula 15/03/2016	Derivada de primeira e de segunda ordem; Extremos, sentido das concavidades e pontos de inflexão; Problemas de otimização.	Utilizar a primeira e a segunda derivada de uma função da resolução de problemas; Construir quadros de sinal para estudar a concavidade de funções; Relacionar as propriedades da segunda derivada com as da primeira derivada e com as da função original, na representação algébrica; Mobilizar o conhecimento das propriedades da primeira e da segunda derivada na resolução de problemas.	Tarefa 4: "Problemas de Otimização"
5ª aula 16/03/2016	Estudo analítico de funções.	Mobilizar o conhecimento prévio sobre funções, para as estudar analiticamente.	Tarefa 5: "Estudo de Funções"

Gostaria de referir que, apesar do objetivo do meu estudo se focar no estudo da segunda derivada de uma função e nas dificuldades que os alunos manifestam na sua aplicação na resolução de tarefas que a envolvem (problemas e situações convencionais - técnicas de derivação), considerei importante iniciar a lecionação com uma aula de revisão da primeira derivada de uma função. Algumas das dificuldades que frequentemente os alunos evidenciam na compreensão da primeira derivada estendemse à compreensão da segunda derivada e, por isso, achei pertinente perceber que dificuldades ainda existiam no que respeita à primeira derivada para poder ajudar a ultrapassá-las antes de iniciar o estudo da segunda derivada. Ainda mais, deu-me oportunidade de articular os conceitos envolvidos, o que penso ser uma mais-valia para a aprendizagem dos alunos.

3.3. Conceitos fundamentais da unidade de ensino

Em relação aos conteúdos trabalhados durante a minha intervenção letiva, senti necessidade de consultar várias referências, são elas, o manual adotado pela escola Matemática A 12º ano: *Novo espaço Parte 2* (Costa, B., Rodrigues, E. (2015)) da Porto editora, o caderno de exercícios adotado Matemática A 12º ano: *Novo espaço Caderno prático* (Costa, B., Rodrigues, E. (2015)) da Porto editora, alguns materiais presentes no site Escola virtual, tanto *Powerpoints*, como vídeos, como aulas interativas. Consultei ainda um manual com exercícios de preparação para exame *Essencial Matemática 12º ano* (Matias, L., Vivas, P., & Castelo, R. (2010)) da Sebenta editora e ainda o manual que utilizei no meu 12º ano Matemática A: *Espaço 12* (Costa, B., Resende, L., & Rodrigues, E. (2010)) da Asa editores.

Estas consultas, para além de me auxiliarem na construção de tarefas e *Powerpoints*, permitiram-me ter uma visão integral da unidade e dos conceitos mais importantes que são estudados. Deste modo, é importante definir esses conceitos, com base na bibliografia que mencionei acima, mas centralmente no manual adotado e no manual de exercícios para exame.

Tal como já referi, apesar de o meu objetivo de centrar na segunda derivada, também revi a primeira derivada, pelo que os conceitos associados a essa também estarão aqui presentes. Assim, os conceitos fundamentais da lecionação desta unidade são: relação da primeira derivada com os intervalos de monotonia e extremos do gráfico original (revisão, porque já foi abordada no 11.º ano), segunda derivada, relação da segunda derivada com o sentido da concavidade e pontos de inflexão do gráfico original, relação da primeira e segunda derivada com a função original.

3.3.1. Relação da primeira derivada com os intervalos de monotonia e extremos do gráfico original (revisão)

Seja f uma função de domínio D.

- $f(a)$ é um máximo absoluto de f se, $\forall x \in D$, $f(a) \geq f(x)$ e ao valor de a dá-se o nome de maximizante;
- $f(b)$ é um mínimo absoluto de f se, $\forall x \in D$, $f(b) \leq f(x)$ e ao valor de b dá-se o nome de minimizante;
- $f(a)$ é um máximo relativo de f se existir um intervalo I, contendo a, tal que $f(a) \geq f(x)$ $\forall x \in I \cap D$, e ao valor de a dá-se o nome de maximizante;
- $f(b)$ é um mínimo relativo de f se existir um intervalo I, contendo b, tal que $f(b) \leq f(x)$ $\forall x \in I \cap D$, e ao valor de b dá-se o nome de minimizante;

Seja f uma função real de variável real diferenciável em $]a, b[$.

- Se $f'(x) > 0$, $\forall x \in]a, b[$, então f é estritamente crescente em $]a, b[$;
- Se $f'(x) < 0$, $\forall x \in]a, b[$, então f é estritamente decrescente em $]a, b[$;
- Se $f'(x) = 0$, $\forall x \in]a, b[$, então f é constante em $]a, b[$;

Seja D o domínio de f, diferenciável em D, e $a \in D$.

Caso f seja uma função contínua em a e f' mudar de sinal em a, então $f(a)$ é um extremo:

- $f(a)$ é máximo se f' passa de positiva a negativa;
- $f(a)$ é mínimo se f' passa de negativa a positiva;

Nesta situação, em que f é uma função contínua e diferenciável, constrói-se uma tabela com o sinal de f' e a variação de f, para retirar conclusões quanto aos intervalos de monotonia e a existência de extremos relativos.

É de salientar que se f possui um extremo em $x = a$, então $f'(a) = 0$. No entanto se $f'(a) = 0$, não podemos concluir que o ponto $(a, f(a))$ é um extremo.

Consideremos a função $g(x)) = x^3$, presente na figura 1.

Ora $g'(x) = 3x^2$ e $g'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Porém, por observação da figura 1, $(0, g(0))$ não é um extremo do gráfico de g. Pode-se ainda pensar que se $x < 0$, então $x^3 < 0$, e se $x > 0$, então $x^3 > 0$, portanto 0 não é extremo.

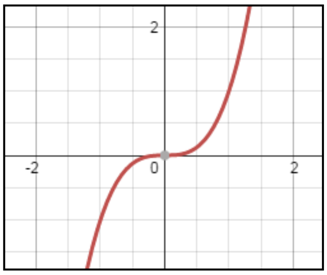


Figura 1 – Função g

Caso f seja descontínua em a é necessário fazer o estudo caso a caso, atendendo à definição de extremos. Isto é, se uma função f, definida num intervalo I de $\mathbb{R}$, possui derivadas laterais (finitas ou infinitas) de sinais contrários num ponto a interior de I, então a função possui um extremo relativo para $x = a$, que será:

- um mínimo se $\begin{cases} f'(a^-) < 0 \\ f'(a^+) > 0 \end{cases}$ - um máximo se $\begin{cases} f'(a^-) > 0 \\ f'(a^+) < 0 \end{cases}$

Se as derivadas laterais em a têm o mesmo sinal, a função não possui extremo relativo para $x = a$

3.3.2. Segunda derivada

À derivada de f' no ponto x_0 chama-se segunda derivada ou derivada de segunda ordem de f no ponto x_0 e representa-se por $f''(x_0)$

$$f''(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x_0 + h) - f'(x_0)}{h} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}$$

desde que o limite exista e seja finito.

Seja D o conjunto dos pontos do domínio de f' em que f' é derivável. A função segunda derivada de f, ou seja, f'', pode ser caraterizada da seguinte forma:

$$f'': D \to \mathbb{R}$$
$$x \to f''(x)$$

E representa-se por f'' ou $D^2 f(x)$ ou $\frac{d^2 f}{dx^2}$.

3.3.3. Relação da segunda derivada com o sentido da concavidade e pontos de inflexão do gráfico original

Seja f uma função derivável em $]a, b[$, tal que $c \in \,]a, b[$, como ilustra a figura 2, abaixo. Podemos observar que no intervalo $]a, c[$ a curva está acima de qualquer das retas tangentes, ou seja, diz-se que a concavidade se encontra voltada para cima e a segunda derivada é positiva. Podemos também observar que no intervalo $]c, b[$ a curva está abaixo de qualquer das retas tangentes, ou seja, diz-se que a concavidade se encontra voltada para baixo e a segunda derivada é negativa.

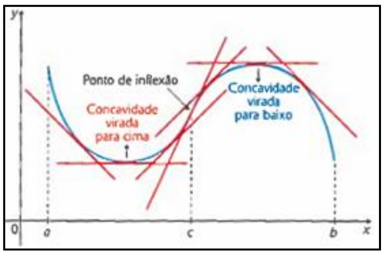


Figura 2 – Sentido das concavidades

Após a definição de concavidade voltada para cima e concavidade voltada para baixa, vamos definir ponto de inflexão. Dada uma função f, duas vezes diferenciável no seu domínio, diz-se que o ponto $P = (a, f(a))$ é um ponto de inflexão do gráfico de f se o sentido da concavidade do gráfico muda em P.

Se $P = (a, f(a))$ é um ponto de inflexão do gráfico de f e existe segunda derivada em a, então $f''(a) = 0$.

No entanto, se $f''(a) = 0$, não se pode concluir que o ponto $(a, f(a))$ seja um ponto de inflexão do gráfico de f.

Consideremos, por exemplo, a função $f(x) = x^4$, representada na figura 3.

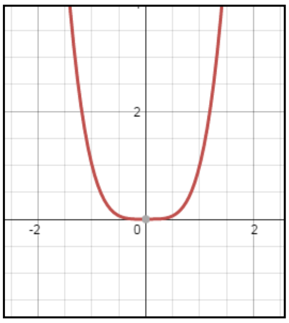


Figura 3 – Função f

Ora $f'(x) = 4x^3$ e $f''(x) = 12x^2$.

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Porém, por observação da figura 3, $(0, f(0))$ não é um ponto de inflexão do gráfico de f.

Dada uma função f duas vezes derivável num intervalo $]a, b[$, o gráfico de f tem:

- A concavidade voltada para cima se $\forall x \in]a, b[,\ f''(x) > 0$
- A concavidade voltada para baixo se $\forall x \in]a, b[,\ f''(x) < 0$
- se $P = (c, f(c))$ é um ponto de inflexão se $f''(c) = 0$, com $c \in]a, b[$

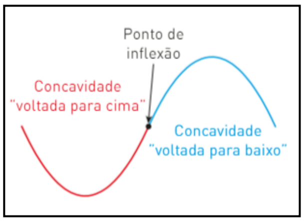


Figura 4 – Concavidades e ponto de inflexão

3.3.4. Relação da primeira e segunda derivada com a função original

Seja f uma função derivável em $]a, b[$, tal que $c \in]a, b[$, como ilustra a figura 5.

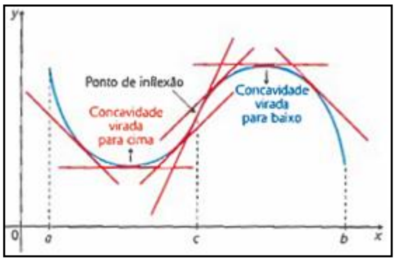


Figura 5 – Concavidades e ponto de inflexão

- No intervalo $]a, c[$ (concavidade voltada para cima), f'' é positiva e f' é crescente
- No intervalo $]c, b[$ (concavidade voltada para baixo), f'' é negativa e f' é decrescente

Assim sendo, relacionando a primeira e a segunda derivada também podemos retirar alguma informação sobre máximos e mínimos de f.

Seja f uma função derivável em $]a, b[$, tal que $c \in]a, b[$ e $f'(c) = 0$.

- Se $f''(c) < 0$, então a função f tem um máximo para $x = c$
- Se $f''(c) > 0$, então a função f tem um mínimo para $x = c$

3.4. Estratégias de ensino

A unidade que lecionei contemplou várias estratégias de ensino, integrando a realização de diferentes tipos de tarefas e metodologias de trabalho variadas, dependendo dos objetivos que pretendi alcançar em cada uma das aulas.

Uma vez que escolhi aplicar tarefas em todas as aulas, foi fundamental a organização das mesmas em diversos momentos para que fossem mais proveitosas, nomeadamente considerei a introdução da tarefa, a realização da tarefa, a discussão da tarefa e a sistematização das aprendizagens dos alunos (Oliveira, Menezes & Canavarro, 2013). Num primeiro momento - a introdução, o meu papel é criar um ambiente propício à realização do trabalho autónomo dos alunos, explicar-lhes de que modo o trabalho se vai desenvolver e provocar o desafio, para que se sintam motivados para realizar a tarefa. Neste momento, o papel dos alunos é indicar se existem dúvidas de conteúdos anteriores e preparem-se para a realização da tarefa, isto é, criar condições para iniciar o momento seguinte de trabalho autónomo. A potencialidade deste momento para a aprendizagem dos alunos passa também pelo esclarecimento de dúvidas que os alunos tenham de conteúdos anteriores para que estejam aptos a aprender novos.

No momento seguinte decorre o trabalho autónomo dos alunos, em que o meu papel é de monitorização, circulando pela sala para esclarecer dúvidas e de recolha de informação, tentando perceber que estratégias vão surgindo, para serem exploradas no momento seguinte as que forem pertinentes e que contribuam para as aprendizagens dos alunos. Esta seleção de resoluções dos alunos é fundamental para que a turma alcance os objetivos definidos para cada aula, uma vez que pretendo que sejam exploradas determinadas estratégias de resolução. Aqui, o papel dos alunos é trabalhar autonomamente, tentando esclarecer as suas dúvidas com os colegas. Este trabalho autónomo tem imensas potencialidades para as aprendizagens dos alunos pois desenvolvem e aprofundam os seus conhecimentos, sem estarem totalmente dependentes da ajuda da professora e consolidam as suas aprendizagens, sendo eles próprios a tentar perceber onde ainda têm dificuldades.

Segue-se um momento de discussão. Esta discussão é sobre o trabalho realizado no momento do trabalho autónomo e é realizada em grande grupo, onde o meu papel é criar condições para que surja uma discussão dinâmica e guiá-la. Estes momentos de discussão podem ajudar a diminuir as dificuldades dos alunos e enriquecer o seu conhecimento, uma vez que “as discussões coletivas na aula de matemática sustentam a construção conjunta de ideias, através da partilha de pensamentos, do ouvir e responder às ideias dos outros e da negociação de significados” (Menezes, Ferreira, Martinho, & Guerreiro, 2013, p.13). Estes momentos têm também a potencialidade de os alunos participarem ativamente na correção da tarefa, o que lhes permite identificar alguma dúvida que ainda tenham e é também “uma forma de participação importante, já que permite aos alunos acompanhar raciocínios, alargar estratégias de resolução de problemas, identificar e corrigir erros e ganhar confiança em si mesmo” (Menezes et al., 2013, p.13). Em relação ao papel dos alunos, estes deverão participar organizadamente, não criando barulho desnecessário e tentar comunicar a sua resolução e explicar à turma como pensaram, fundamentando as suas estratégias.

Por último, o professor assume também o papel de sistematizador e consolidador de conhecimentos, questionando os alunos sobre as dúvidas que ainda existam, pois é neste momento que o conhecimento tem de ficar maioritariamente consolidado para poderem aprender conteúdos novos, nas aulas seguintes. A grande potencialidade deste momento para as aprendizagens dos alunos é por ser de síntese, permitindo-lhes organizar as ideias desenvolvidas e discutidas ao longo da aula.

Ainda sobre o meu papel de professora na aula, para além do que já indiquei acima, também selecionei as tarefas matemáticas e tentei promover a motivação dos alunos, dado que é com confiança que os alunos se envolvem em tarefas matemáticas complexas, sendo fundamental que o consiga. Portanto, sempre que um aluno tenha uma estratégia interessante, mesmo que não a tenha planeado, é apresentada no quadro, para motivar o aluno e louvá-lo pelo seu processo de resolução.

Como habitual, a turma trabalhou a pares, dado que o trabalho a pares é, geralmente, bastante eficaz (NCTM, 2007), de modo a partilharem ideias, esclarecem dúvidas com os colegas e para dar oportunidade de trabalharem autonomamente, guiados pelo professor.

Apesar de a estrutura das aulas ter sido maioritariamente como descrevi acima, existiram alguns momentos da lecionação onde tive um papel mais saliente e expositivo, como por exemplo, na revisão da primeira derivada e na introdução do conceito de segunda derivada, onde recorri ao *Powerpoint.* Recorri a este recurso para rever a primeira derivada, porque permitiu explorar os intervalos de monotonia e extremos da função original analisando o sinal da primeira derivada, em grande grupo, poupando o tempo de escrita e melhorando o rigor dos gráficos apresentados, uma vez que já os trazia desenhados. Utilizei-o também para introduzir a segunda derivada, porque queria que os alunos descobrissem autonomamente que informações da função original podemos obter a partir do estudo do sinal da segunda derivada. Assim, apresentei-lhe várias funções e os respetivos gráficos, constituindo uma vantagem do *Powerpoint*, porque os pude trazer já desenhados com rigor, e guiei os alunos à descoberta de conclusões. Ou seja, a informação aparece pela ordem que quero, com o devido rigor e pode-se ainda animar a informação, o que evidencia certos aspetos que a informação estática apresentada no livro não evidencia.

Segundo o NCTM (2007), para que a aprendizagem seja significativa, os alunos devem aprender matemática com compreensão, construindo novos conhecimentos a partir da experiência e de conhecimentos prévios. Deste modo, no início de cada aula existiu uma breve revisão dos conteúdos da anterior, para que os alunos pudessem não só recordá-los, como também articulá-los com os da presente aula. Para além destas revisões em todas as aulas, a primeira aula foi dedicada à revisão da primeira derivada, uma vez que não faria sentido iniciar o estudo da segunda derivada sem primeiro fazer uma revisão da primeira derivada, de forma a possibilitar aos alunos que estabelecessem conexões entre elas.

Ainda para que a aprendizagem seja significativa, o professor deve formular questões com o propósito de desenvolver a compreensão e o conhecimento matemático dos alunos (Menezes et al., 2013) e promover o envolvimento dos alunos na descoberta e construção de conhecimentos (Ponte, 2005), pelo que, em cada aula, propus um conjunto de questões para desafiar os alunos, com o intuito de eles chegarem à resposta em grande grupo, sem o meu auxílio. Este conjunto de questões foi colocado no momento da discussão, após os alunos terem trabalho autonomamente. As questões estavam relacionadas com os tópicos a abordar em cada aula, porém possuíam um grau de dificuldade superior às que estavam presentes nas tarefas e tinham como objetivo desenvolver a compreensão e conhecimento dos alunos, bem como proporcionar-lhes o sentido de descoberta.

Relativamente ao uso da tecnologia, os alunos utilizaram apenas a calculadora, como ferramenta auxiliar para realizarem cálculos e representarem funções graficamente, à exceção da última tarefa (tarefa 5). Nesta tarefa, o objetivo era os alunos estudarem analiticamente várias funções e representarem-nas graficamente através das informações que retiravam desse estudo e, por isso, não foi permitido o uso da calculadora.

3.5. Tarefas

Tal como já referi anteriormente, apliquei uma tarefa em cada aula que lecionei. A primeira tarefa intitula-se "Revisão da Primeira Derivada", a segunda intitula-se de "Segunda Derivada", a terceira "Aplicação da Segunda Derivada", a quarta "Problemas de Otimização" e a quinta "Estudo de Funções" (ver Anexo 8 ao 12). Todas elas foram retiradas de diversos manuais e adaptadas com cuidado, ao contexto da turma para que permitissem desenvolver a compreensão dos conceitos e processos, ao mesmo tempo que estimulassem capacidades transversais, como por exemplo, a resolução de problemas ou a comunicação.

As orientações curriculares defendem que alunos devem realizar "tarefas matemáticas valiosas com potencial para proporcionar aos alunos aprendizagens matemáticas sofisticadas, que vão além da aplicação de conceitos e treino de procedimentos" (Canavarro, 2011, p.16). Para além disto, Ponte defende que "a aprendizagem decorre, sobretudo, não de ouvir diretamente o professor ou de fazer esta ou aquela atividade prática, mas sim da reflexão realizada pelo aluno a propósito da atividade que realizou" (Ponte, 2005). Para a realização das tarefas é crucial que "o professor dê tempo aos alunos para que eles possam pensar por si próprios" (Ponte, 2005) e que possibilite a participação de todos, fomentando momentos de discussão e de sistematização, e, por isso, as aulas foram estruturadas de forma a existirem estes momentos.

Para a aplicação das tarefas, para além da sua escolha criteriosa e adaptação, foi fundamental ter em conta aspetos como a gestão da aula sem desperdício de tempo e a promoção de um ambiente estimulante, propício à aprendizagem dos alunos.

O meu objetivo geral com estas tarefas é levar os alunos a mostrar qual a compreensão que os alunos do 12.º ano evidenciam da noção de segunda derivada de uma função e as dificuldades que manifestam na sua aplicação na resolução de tarefas que a envolvem (problemas e situações convencionais - técnicas de derivação). Porém, para que os alunos compreendam os conceitos envolvidos em toda a unidade didática e, em particular, na relação entre a derivada de segunda ordem de uma função e a função original, considero que as tarefas têm de ter natureza diversa. Os exercícios de revisão permitem aos alunos rever conteúdos já lecionados e perceber se ainda existem dúvidas, os exercícios de aplicação permitem aos alunos aplicar conhecimentos recentemente adquiridos e os problemas de otimização têm como objetivo levar os alunos a relacionar a segunda derivada com a função original para retirarem conclusões sobre a função original, em contextos de situações reais, onde o espírito crítico é fundamental.

Esta diversificação na natureza das tarefas é defendida por Ponte (2005), uma vez que cada tipo de tarefa desempenha um papel importante para alcançar certos objetivos curriculares. Deste modo, o trabalho realizado nas aulas teve por base a aplicação de tarefas diversificadas envolvendo derivadas, tendo cada uma um objetivo diferente, sendo estas exercícios e problemas.

Tarefa "Revisão da Primeira Derivada"

A primeira tarefa "Revisão da Primeira Derivada", como o nome indica, é de revisão e consolidação de conhecimentos prévios sobre a primeira derivada de uma função, nomeadamente relacionar as propriedades da primeira derivada com as da função original, em diferentes representações (gráfica, algébrica e numérica); a construção de quadros de sinal para estudar a monotonia e os extremos de funções, relacionando o sinal da primeira derivada com os intervalos de monotonia e os extremos da função original.

Esta tarefa é constituída por 6 questões. As questões 1, 3, 4 e 5 têm como objetivo relacionar as propriedades da primeira derivada com as caraterísticas da função original, em diferentes representações. As questões 2 e 6 têm como objetivo utilizar a primeira derivada de uma função na resolução de um problema de otimização, tendo os alunos que descobrir primeiramente a função que o modela e depois interpretar os resultados no contexto do problema, o que exige espírito crítico.

Tarefa "Segunda Derivada"

Esta tarefa "Segunda Derivada" foi a segunda que apliquei com o intuito de introduzir o novo conceito de segunda derivada. Tem como objetivos a compreensão da segunda derivada em diferentes representações, relacionando-a com a primeira derivada e com a função original, particularmente para estudar as concavidades e pontos de inflexão do gráfico da função original e a sua aplicação na resolução de exercícios.

Esta tarefa é constituída por 3 questões, integrando mais 4 exercícios do manual para trabalho de casa. A primeira questão tem como objetivo determinar a segunda derivada de uma variedade de funções (logarítmica, exponencial e polinomiais) apresentadas na sua forma algébrica, requerendo a utilização de diversas regras de derivação já suas conhecidas.

A segunda questão tem como objetivo levar os alunos a relacionar a representação gráfica da função original com a primeira e a segunda derivadas, de forma a retiraram conclusões sobre as duas últimas. Por último, na terceira questão, pretende-se relacionar as representações gráficas da função original, da primeira derivada e da segunda derivadas, com o intuito de conseguirem estabelecer uma correspondência entre elas.

Tarefa "Aplicação da Segunda Derivada"

A tarefa "Aplicação da Segunda Derivada" foi a terceira que apliquei. É composta por exercícios que requerem a construção de quadros de sinal para estudar a concavidade de funções, levando os alunos a relacionar as propriedades da segunda derivada com as da primeira derivada e com as da função original, em diferentes representações e a mobilizar o conhecimento das propriedades da segunda derivada na resolução dos exercícios.

Esta tarefa é constituída por 8 questões, sendo que as últimas 3 são a extensão da tarefa. As questões 1, 4, 6 e 7 têm como objetivo relacionar o sinal da segunda derivada com o sentido das concavidades e pontos de inflexão do gráfico da função original. As questões 2 e 5 têm como objetivo relacionar o gráfico da função original com as propriedades da primeira e segunda derivada, uma vez que os alunos têm de identificar o sinal das funções derivadas em alguns pontos da função original. Na questão 3 pretende-se que os alunos relacionem as propriedades da segunda derivada com as da função original, nas diferentes representações.

Por último, a questão 8 tem como objetivo relacionar a primeira e a segunda derivada com a função original, a partir dos seus gráficos, escrevendo uma pequena composição para explicar a correspondência que estabelecerem.

Tarefa "Problemas de Otimização"

A tarefa "Problemas de Otimização" foi a quarta que apliquei e, tal como o nome indica, é de resolução de problemas de otimização. Tem como objetivos mobilizar os conhecimentos sobre a primeira e a segunda derivada de uma função e utilizá-los na resolução de problemas, construindo quadros de sinal para estudar a concavidade de funções e relacionando as propriedades da segunda derivada com as da primeira derivada e com as da função original, na representação algébrica.

Esta tarefa é constituída por 6 questões, sendo que as últimas duas são a extensão da tarefa. As questões têm como objetivo utilizar a primeira e/ou a segunda derivada de uma função na resolução de um problema de otimização em que os alunos deverão interpretar os resultados no contexto do problema, exigindo espírito crítico.

Tarefa "Estudo de Funções"

A última tarefa "Estudo de Funções" não foi possível realizar em sala de aula, pelo que a enviei para trabalho de casa durante o período de férias escolares da Páscoa. É composta por exercícios de aplicação e tem como objetivo mobilizar o conhecimento prévio sobre funções e suas derivadas, para realizar o seu estudo completo, analiticamente.

Esta tarefa é constituída por 4 questões. A primeira tem como objetivo mobilizar o conhecimento das propriedades das funções como o domínio, a paridade, as assíntotas, os pontos de interseção do gráfico com os eixos coordenados, a primeira derivada (o estudo do sinal da 1ª derivada), a segunda derivada (o estudo do sinal da 2ª derivada) e o contradomínio, para representar graficamente as funções. A escolha de funções foi intencional, uma vez que pretendia que os alunos estudassem, por exemplo, uma função que não fosse par nem ímpar e outra que o fosse uma das duas (na alínea b, a função é ímpar), para relacionarem essa informação aquando da representação gráfica. Também pretendi escolher uma função que não apresentasse assíntotas verticais (é o caso da alínea c) por ser contínua e com domínio $\mathbb{R}$ e uma função em que a segunda derivada não se anulasse, por exemplo, para os alunos interpretarem esse resultado (alínea a).

Na segunda e na terceira questão pretende-se que os alunos mobilizem conhecimentos sobre as propriedades de uma função, sem conhecerem a sua expressão analítica, a fim de a representar graficamente. Por último, na questão 4, os alunos terão que mobilizar os seus conhecimentos sobre a paridade de funções.

3.6. Avaliação das aprendizagens

Segundo Pinto e Santos (2006), a avaliação das aprendizagens é um processo deliberado e sistemático de recolha de informação, mais ou menos participado e interativo, acerca do que os alunos sabem e são capazes de fazer em diversas situações. Nesta perspetiva, os testes sumativos, que são frequentemente usados, não são a única forma de avaliação.

Segundo os mesmos autores, existem 3 tipos de avaliação: avaliação diagnóstica, avaliação reguladora e avaliação sumativa, e para cada tipo existe uma função que lhe está associada: função de orientação, regulação e certificação, respetivamente. Falarei também sobre os instrumentos que utilizei durante a lecionação das minhas aulas, devido à sua importância no processo de ensino e aprendizagem (Pintos & Santos, 2006).

Relativamente à avaliação diagnóstica (função de orientação), esta permite obter informações sobre os conhecimentos e interesses dos alunos e consequentemente, determinar as causas subjacentes às suas dificuldades de aprendizagem. Assim sendo, na primeira aula realizei uma tarefa de revisão sobre a primeira derivada a partir da qual pude perceber que conhecimentos os alunos mobilizaram para a resolver e que dificuldades ainda persistiam sobre a primeira derivada. Isso permitiu-me, na segunda aula, articular melhor os conteúdos novos, sobre a segunda derivada, utilizando os conhecimentos que os alunos já possuíam e combatendo as dificuldades existentes.

Já a avaliação reguladora (função de regulação) está associada ao fornecimento de *feedback* aos alunos, respeitante ao progresso das suas aprendizagens. Este tipo de avaliação é dirigido ao aluno, permite que os objetivos de aprendizagem sejam conhecidos e apropriados pelo professor e pelos alunos, valoriza o processo de ensino de aprendizagem e não só o resultado final, incentiva a autoconfiança dos alunos, visto que "as ideias dos alunos devem ser valorizadas e servir de fonte de aprendizagem" (NCTM, 2007, p.169) e desenvolve uma postura reflexiva a partir dos dados recolhidos (Santos, 2011). Assim, forneci *feedback* descritivo das resoluções das tarefas, de aula para aula (Gipps, 1999), com o intuito de promover e incentivar a reflexão dos próprios alunos (Jorro, 2000). Ou seja, a avaliação formativa ou reguladora é bastante importante visto que promove a autorregulação, permitida pelo *feedback* fornecido pelo professor e penso que foi benéfica para os alunos.

Deste modo, creio que a avaliação reguladora pode ser a resposta para motivar os alunos, se a integrarmos no processo de avaliação como contributo para as aprendizagens, dado que "um ensino efetivo requer um ambiente de aprendizagem desafiante e apoiado" (NCTM, 2007, p.19).

Por último, usei a avaliação sumativa (função de certificação), onde se estabelece o balanço das aprendizagens e se classificam os resultados dessa aprendizagem. Neste âmbito, recolhi as resoluções de todas as tarefas que os alunos realizaram em aula ou como trabalho de casa, que incluía uma composição e o trabalho de férias. Nos trabalhos de casa mencionados colaborei na sua avaliação, atribuindo classificação. Relativamente à composição, esta consistia na correspondência, justificada, entre duas representações gráficas e a primeira e segunda derivada, sendo fornecido o gráfico da função original.

Escolhi recolher este documento porque, sempre que possível devemos tentar aplicar outras formas de avaliar sumativamente os alunos (Santos, 2011).

Ainda relativamente à avaliação, uma outra componente considerada foram as intervenções dos alunos durante as aulas, o seu comportamento, as respostas que deram às questões que ia colocando, o seu interesse e a sua participação nas aulas. Estas intervenções possuem um duplo papel na avaliação, uma vez que fazem parte da avaliação sumativa e da formativa, isto é, não atribuo apenas uma classificação às intervenções dos alunos, como também lhes forneço feedback, para que possam melhorar as suas aprendizagens.

3.7. Aulas lecionadas

As cinco aulas que lecionei decorreram de 4 a 16 de março de 2016. Uma vez que "o ensino efetivo da matemática requer a compreensão daquilo que os alunos sabem e precisam de aprender, bem como o subsequente estímulo e apoio para o aprenderem corretamente" (NCTM, 2007, p.11), iniciei todas as aulas ditando o sumário, relembrando e revendo os tópicos trabalhados da aula anterior, através da correção do trabalho de casa e como se relacionavam com os da aula atual. Relativamente à pontualidade e assiduidade dos alunos, eles eram pontuais, existindo uma minoria de alunos que se atrasava de 5 a 10 minutos, e assíduos. Em todas as aulas foi proposto trabalho de casa, uma vez que não foi possível concluir as tarefas em sala de aula, devido à falta de tempo.

No início de cada aula, distribuía os enunciados das tarefas e uma folha branca, para poder recolher, no final de cada aula, uma das resoluções de cada par de alunos. Os alunos mostraram-se sempre interessados e aderiram bem a todas as tarefas.

Segundo Ponte (2005), não basta selecionar boas tarefas, é ainda necessário ter atenção ao modo de as propor e de conduzir a sua realização na sala de aula. Como é sabido, esta condução da aula não é uma tarefa fácil para o professor, pelo que tive de planear cada uma delas com cuidado (Anexos 2 a 7), definindo quais os objetivos que pretendia alcançar com a realização e discussão das tarefas. Para cada uma delas previ ainda algumas estratégias de resolução que esperava dos alunos e tentei antecipar a maior parte das dúvidas, permitindo-me dar-lhes resposta mais rapidamente.

1ª Aula (4 de março de 2016)

Esta aula teve três grandes momentos: exploração de *Powerpoint* em grande grupo, trabalho autónomo dos alunos na realização de exercícios e da tarefa e discussão coletiva sobre o trabalho autónomo. O momento de exploração do *Powerpoint* teve como objetivo rever os conhecimentos dos alunos sobre a primeira derivada e suas propriedades, durante o qual fui questionando os alunos de forma a orientá-los nessa revisão. As respostas corretas às questões colocadas indiciam que os alunos da turma recordaram com facilidade o que tinham aprendido sobre a primeira derivada de uma função e de que forma as suas propriedades nos fornecem informações sobre a função original, nomeadamente os seus máximos e mínimos.

Nos momentos de trabalho autónomo, que ocorreram quando os alunos fizeram o exercício final proposto no *Powerpoint* e as questões 1 e 2 da tarefa "Revisão da Primeira Derivada", surgiram algumas dúvidas que foram posteriormente discutidas, nos momentos de discussão e, que, considero terem sido ultrapassadas, constituindo aprendizagens. As aprendizagens sobre a primeira derivada foram mais aprofundadas com a correção do trabalho na aula seguinte.

Em relação ao meu papel nos momentos de discussão, penso que consegui dirigir as perguntas a alunos em particular tendo conseguido, deste modo, diminuído o barulho, aumentado a participação de diversos alunos e incentivá-los, fornecendo reforço positivo.

Em termos de planeamento, senti necessidade de alterar o plano de aula, porque durante os momentos de discussão os alunos colocaram dúvidas em aspetos que pensei já não suscitar dificuldades, nomeadamente no cálculo de derivadas, domínios, volumes e áreas e também não utilizaram as estratégias mais eficientes para resolver os exercícios, tendo-se despendido mais tempo de que tinha previsto devido à extensão dessas estratégias. Estas dificuldades, levaram a que os alunos demorassem mais tempo na realização dos exercícios propostos e, consequentemente, só se discutiram estas duas questões da tarefa. Após refletir, também considero que a questão 2 da tarefa tem um grau de dificuldade superior às restantes e talvez não devesse ser a melhor questão para a parte inicial da tarefa.

Considero, no entanto, que o balanço global da aula foi positivo, baseado na informação supramencionada. O *Powerpoint* pareceu-me adequado, porque os alunos evidenciaram perceber os conceitos abordados, dado que iam respondendo às minhas questões e conseguiram realizar o exercício final sem dificuldade. A tarefa também me pareceu adequada, porém, eu ajustá-la-ia, trocando a ordem das questões de forma a ter um exercício de resolução analítica, seguido de um exercício envolvendo articulação com representação gráfica.

2ª Aula (8 de março de 2016)

No momento de discussão coletiva do trabalho de casa, com que iniciei a aula, selecionei a questão 3 da tarefa 1 para ser corrigida porque, na aula anterior, os alunos apenas tiveram oportunidade de relacionar a função original e a sua derivada de modo analítico e este exercício permitia estudar essa relação graficamente. Este momento prolongou-se mais do que o previsto, uma vez que apenas três alunos tinham realizado o trabalho de casa e, por isso, senti necessidade de lhes dar 5 minutos para lerem o enunciado antes de o resolvermos em grande grupo. No final, e relativamente às aprendizagens, penso que os alunos compreenderam a relação entre a monotonia da função original e o sinal da sua derivada, uma vez que foram capazes de responder acertadamente às questões que eu colocava.

Com o apoio de um *Powerpoint*, introduzi a segunda derivada de uma função e as suas propriedades. Esta apresentação foi acompanhada de questionamento aos alunos, de forma a orientá-los no estudo da segunda derivada e a concluir sobre as propriedades da função original que podemos obter ao estudar as propriedades da segunda derivada. No decorrer desta exploração, os alunos foram respondendo acertadamente ao que eu questionava, indicando que estavam a acompanhar as ideias abordadas e, no final, conseguiram concluir que utilizando a primeira e a segunda derivada, não é necessário recorrer ao quadro de sinal para concluir quanto aos extremos da função original, o que me deixou satisfeita, uma vez que tinha planeado um exercício final com esse objetivo. Este momento prolongou-se devido às questões colocadas pelos alunos sobre a segunda derivada, mas dada a pertinência de questões como, por exemplo, saber se um ponto onde a segunda derivada se anula é obrigatoriamente um ponto de inflexão, considero que o tempo utilizado foi útil. No entanto, deveria ter planeado mais tempo aquando da preparação da aula, sobretudo porque algumas das dúvidas que surgiram tinham sido antecipadas por mim. Ainda sobre este tópico, também tinha planeado mostrar um breve vídeo após a exploração do *Powerpoint*, mas não senti necessidade de o fazer, visto que os alunos reagiram positivamente ao material explorado, e por isso considerei que o vídeo não iria acrescentar mais às suas aprendizagens.

Seguiu-se um momento de trabalho autónomo, onde os alunos resolveram a questão 1 da tarefa 2 para consolidarem as regras de derivação. Este momento desenrolou-se no tempo previsto, tendo eu antecipado algumas das dúvidas que evidenciaram. Porém, enquanto circulava, pude observar estratégias que não estava à espera, mas que eram corretas. Por exemplo, para os alunos derivarem $4ln^2(x)$, esperava que utilizassem a regra da potência, ou a regra do produto de uma constante por uma função, ou ainda a regra do produto aplicada ao fator 4 e ao fator $ln^2(x)$. Contudo, alguns alunos derivaram utilizando a regra do produto de três fatores, sendo os fatores o 4, $\ln(x)$ e $\ln(x)$ e outros ainda utilizaram a regra do produto de dois fatores, em que um era o $4\ln(x)$ e outro era o $\ln(x)$. Também para derivar 7^{-x}, pensava que todos os alunos iriam utilizar a regra da exponencial, mas alguns realizaram primeiro uma transformação na expressão: $7^{-x} = e^{\ln(7)\times(-x)}$. Dado que estas estratégias eram interessantes foram exploradas em grande grupo, no quadro.

Terminei a aula com a correção e discussão desta questão, que se desenrolou no tempo previsto. Considero que o balanço global da aula foi positivo, baseado na informação supramencionada. Teria cumprido o plano de aula, se não tivesse feito a revisão inicial, porém essa era essencial. Preciso, no entanto, de melhorar a marcação do momento final, seja quando indico o trabalho de casa ou sistematizo algum raciocínio, uma vez que se gera alguma confusão nos últimos minutos da aula. Dado que estes últimos momentos são importantes, preciso de marcá-los melhor.

3ª Aula (9 de março de 2016)

Esta aula teve início com um momento de discussão coletiva do trabalho de casa, no qual fui solicitando aos alunos para explicarem como tinham pensado. Este momento prolongou-se devido às questões que os alunos colocaram e às quais não consegui responder de imediato, pelo que tomei nota e disse-lhes que responderia na próxima aula. De seguida, passei a um momento de resolução e discussão simultânea da alínea a) da questão 1 da tarefa 3, que se desenrolou no tempo previsto sem suscitar muitas dúvidas.

Decidi resolver e discutir em simultâneo a primeira alínea, porque era a primeira vez que os alunos iriam estudar as concavidades de uma função utilizando a segunda derivada e construir um quadro de sinal. Os alunos tiveram facilidade em perceber o que estava a ser discutido em relação à construção do quadro de sinal relacionando o sinal da segunda derivada com as concavidades e os pontos de inflexão da função original e foram respondendo acertadamente ao que eu questionava. Foi, portanto, um momento bastante produtivo da aula, sem grandes dificuldades por parte dos alunos, onde de realizaram aprendizagens significativas.

Depois houve um momento de trabalho autónomo, onde os alunos resolveram as questões 1 (restantes alíneas), 2 e 3 da tarefa 3. Este momento já se prolongou um pouco para além do tempo previsto, mas senti necessidade de fornecer esse tempo extra aos alunos, porque, quando circulei, reparei que estavam empenhados e a conseguir responder ao que era pedido. Portanto, concluo que o tempo que previ para a resolução destes exercícios não era suficiente, sendo este um aspeto que preciso melhorar. Para além disso, enquanto circulava pude observar estratégias que não estava à espera. Muitos alunos me perguntaram se era possível a segunda derivada não se anular, visto que se passava isso no exercício 1, alínea d). Porém, em vez de responder de imediato, devolvi-lhes a questão e acabaram por conseguir autonomamente encontrar um exemplo que respondia às suas dúvidas.

Por fim, o momento de discussão em grande grupo. Como, ao circular pela sala, durante o trabalho autónomo, não identifiquei grandes dificuldades na resolução dos exercícios, decidi alterar o plano e fazer eu a correção no quadro, escolhendo alguns alunos para me indicarem a sua resolução. As dúvidas que mencionei terem surgido no momento de trabalho autónomo foram discutidas e, considero que foram ultrapassadas, constituindo aprendizagens dos alunos. Concluo que os alunos consolidaram os conhecimentos sobre a segunda derivada, conseguindo perceber de que forma o seu sinal se relaciona com as concavidades e pontos de inflexão da função original, atendendo às respostas maioritariamente corretas que observei.

Considero, igualmente, que o balanço global da aula foi positivo, baseado na informação supramencionada. A tarefa verificou-se adequada, integrando exercícios que requerem uma resolução analítica e outros que recorrem à interpretação gráfica, cobrindo uma maior diversidade de questões e enriquecendo o conhecimento dos alunos.

4ª Aula (15 de março de 2016)

Esta aula teve três grandes momentos: discussão coletiva do trabalho de casa (questões 3 e 4 da tarefa 3), seguida do trabalho autónomo (resolução das questões 1 e 2 da tarefa 4) e, por último, discussão coletiva dos exercícios 1 e 2.

No momento de discussão coletiva do trabalho de casa, pedi a um aluno para ir ao quadro resolver a questão 3 e chamei outro para me dizer como tinha feito a questão 4, visto que esta última era de resposta de verdadeiro ou falso. Este momento desenrolou-se no tempo previsto e penso que a turma consolidou as suas aprendizagens sobre a segunda derivada, porque os exercícios permitiram relacionar graficamente as propriedades da função original com as da segunda derivada e, na aula anterior, essa relação já tinha sido estabelecida a nível analítico e numérico. Para além de responderem acertadamente às questões que eu fui fazendo durante a discussão, os registos das suas respostas a estas questões estão maioritariamente corretos, o que me leva a concluir que os alunos não terão ficado com muitas dúvidas em relação a este tópico.

Depois, seguiu-se um momento de trabalho autónomo onde os alunos resolveram as questões 1 e 2 da tarefa 4. Pouco tempo depois de os alunos começarem a resolver os exercícios, apercebi-me de uma dúvida geral no que respeita à interpretação da imagem da questão 1, pelo que a expliquei no quadro. Este momento prolongou-se para além do tempo previsto, mas senti necessidade de fornecer esse tempo extra aos alunos, porque, quando circulei, reparei que estavam empenhados e a conseguir responder ao que era pedido. Portanto, concluo que o tempo que previ para a resolução destes exercícios não era suficiente. Para além disso, enquanto circulava pude observar uma estratégia correta que não estava à espera, que contribuía para as aprendizagens dos alunos, pelo que o aluno que a realizou apresentou-a no quadro. Na questão 1, os alunos mostraram entender que para resolver o problema tinham de modelar a área da figura em função de uma única variável, tal como já o tínhamos feito quando resolvemos coletivamente um exercício semelhante numa aula anterior, mas com volumes. Nessa altura tinham surgido dificuldades, o que não ocorreu nesta aula. Em relação à questão 2, os alunos também evidenciaram terem percebido a importância de fornecer a resposta no contexto do problema, porque tiveram esse cuidado.

Por último, o momento de discussão é o momento onde se ultrapassam as dificuldades e consolidam-se os conhecimentos, discutindo as resoluções realizadas pelos alunos. Considero que desempenhei bem o meu papel quando, na discussão das questões 1 e 2, chamei a atenção para que respondessem de acordo com as informações do enunciado e não se limitassem a resolver algebricamente a questão. Na questão 2, alínea 3, surgiram dificuldades na aplicação das regras de derivação, pelo que a sua correção no quadro permitiu rever as regras de derivação do produto e da função exponencial que tinham suscitado as maiores dúvidas. Penso que os alunos perceberam, após a resolução dos problemas de otimização, que existem situações do dia-a-dia que podem ser modeladas por uma função e a aplicação do cálculo diferencial ao seu estudo permite retirar conclusões sobre a situação. Neste momento também foi possível rever o limite notável $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty\,, p \in \mathbb{R}$ e rever e consolidar, mais uma vez, a primeira e segunda derivada.

No final da aula, existiam apenas 3 minutos para corrigir a alínea 4 da questão 2, pelo que optei que fosse corrigida no início da próxima aula, visto que essa questão exigia a construção de um quadro de sinal e necessitaria de mais tempo. Considero que foram cumpridos os objetivos que defini para esta aula, baseado na informação supramencionada. A tarefa pareceu-me adequada, possuindo exercícios diversos, enriquecendo o conhecimento dos alunos.

5ª Aula (16 de março de 2016)

Esta última aula teve a duração de 50 minutos, ao invés de 90 minutos como estava planeado, devido à ocorrência de um simulacro na Escola, pelo que o plano não foi cumprido. Deste modo, a aula teve apenas um momento de discussão coletiva do trabalho de casa (questão 2.4 da tarefa 3 e questões 3 e 4 da tarefa 4). Apesar deste momento não estar planeado, considerei que apenas dois exercícios de otimização de problemas corrigidos não eram suficientes, e por isso decidi corrigir mais dois, aumentando a diversidade dos exercícios. Optei por corrigir eu no quadro, escolhendo alunos para me indicarem a sua resolução, porque como era o último dia de aulas, os alunos estavam irrequietos e mais barulhentos e desconcentrados que o habitual, pelo que colocar alunos no quadro iria criar mais confusão desnecessária. Durante esta correção surgiu uma estratégia que não previ, que simplificava os cálculos, portanto, escrevi-a também no quadro e discuti com os alunos a sua vantagem.

Relativamente às aprendizagens, verifiquei que a maioria dos alunos resolveu corretamente os problemas e respondeu acertadamente às questões que eu colocava. Na resolução de problemas, particularmente os de otimização, é importante interpretar o contexto do problema e não basta uma resolução analítica do mesmo. Este aspeto parece ter sido compreendido pelos alunos, para além da utilidade do cálculo diferencial para analisar situações do dia-a-dia que podem ser modeladas por uma função. Por exemplo, na questão 3, alínea 1, era pedido em que período do dia a quantidade de água que está a entrar no reservatório é superior ou igual à quantidade de água que está a sair e os alunos teriam de interpretar isto no contexto do problema para poderem concluir que este pedido é equivalente a perguntar em que período a função $h(t)$ é crescente. Na mesma questão, mas na alínea 2, fez-se uma revisão sobre medidas de capacidade, conversões e diferença entre volume e capacidade máxima, pelo que esta revisão também constitui uma aprendizagem, pois alguns alunos não se lembravam destes conceitos. Posto isto, considero que esta aula teve aprendizagens significativas e que a discussão deste trabalho de casa foi necessária e enriqueceu o conhecimento dos alunos.

No final da aula, existiam apenas 10 minutos, o que era insuficiente para iniciar a tarefa 5 que tinha planeado, visto que o estudo de uma função é demorado. Deste modo, aproveitei estes últimos minutos para explicar como se fazia o estudo de uma função, isto é, que propriedades da função deveriam ter em conta para o seu estudo ser completo (como por exemplo, assíntotas, domínio, monotonia, concavidades, entre outros), para distribuir a tarefa 5 e indicar que seria para trabalho de férias solicitando para a resolverem numa folha à parte para me entregarem no primeiro dia de aulas.

Capítulo 4

Métodos de recolha de dados

Neste capítulo vou apresentar os métodos de recolha de dados que utilizei durante a lecionação da subunidade didática. Tendo em conta o objetivo e as questões do estudo, a recolha de dados irá basear-se essencialmente em dois métodos: a observação das aulas, com registo vídeo e notas de campo e a recolha documental das produções escritas dos alunos na realização de tarefas. É essencial utilizar vários métodos de recolha, uma vez que a utilização de vários instrumentos de recolha de dados possibilita uma maior confiança dos dados obtidos a partir de diversas fontes, o que confere maior fiabilidade e ao estudo (Cohen, Manion, & Morrison, 2000).

4.1. Observação

A observação de aulas é um método importante de recolha de dados, uma vez que permite recolher informação que é difícil de obter de outra forma, como por exemplo, aspetos imprevisíveis e comunicação não-verbal que ocorrem na sala de aula, e não depende do que os outros dizem. A observação das aulas, tendo em conta o grau de participação do investigador, pode ser participante ou não participante. Segundo Becker e Geer (1969), uma observação participante é o método em que o observador participa de forma aberta no seu papel de investigador, observando o que acontece, ouvindo o que é dito e questionando os alunos. Deste modo, a observação participante implica a inserção do investigador na comunidade em estudo, neste caso na turma, para registar os comportamentos e interações dos alunos, envolvendo-se nas atividades que está a estudar (Evalsed, 2009, citado em Silva, 2012).

Pelo que foi dito, neste estudo recorri a uma observação participante, dado que vou desempenhar o papel de investigador e de professor da turma em simultâneo, participando nas atividades da turma e recolhendo dados com o objetivo do estudo. Porém, tenho em atenção que o papel de professor deverá prevalecer sobre o de investigador, não permitindo o imediato e sistemático registo descritivo de todas as situações que decorrem em sala de aula. Para ultrapassar esta dificuldade, considerei fundamental, no final de cada uma das aulas, redigir notas de campo o mais completas possíveis. Estas notas de campo tiveram como propósito registar os acontecimentos mais relevantes que vão surgindo no decurso do trabalho de sala de aula. Porém, saliento que o mais importante não é recolher dados em grande quantidade, mas sim em qualidade, ou seja, dados adequados ao objetivo que pretendo alcançar (Ponte, 2002) e que permitam responder às questões de investigação.

As notas de campo, segundo os autores Cohen, Manion e Morrison (2000) devem ser descritivas e reflexivas, detalhadas e concretas, incluir detalhes visuais quando apropriado e devem permitir uma descrição cronológica dos acontecimentos. As notas de campo descritivas têm como objetivo a descrição dos acontecimentos, ou seja, ajudam-me a organizar os acontecimentos cronologicamente, a recolher as dificuldades dos alunos, como reagiram às tarefas propostas, se recorrem à calculadora para resolver os problemas ou não, entre outras. Já as notas de campo reflexivas prendem-se com a análise dos acontecimentos, ou seja, são pequenas reflexões sobre o que observo. Por exemplo, através das notas de campo descritivas anotei algumas dificuldades que os alunos apresentaram na realização de uma tarefa, mas foi através de uma reflexão posterior que tentei perceber a sua origem e é aqui entram as notas de campo reflexivas.

Assim, tendo em conta a natureza deste estudo, o seu objetivo e questões de investigação e a sua ligação com a prática de ensino supervisionada, considerei essencial elaborar estes dois tipos de notas de campo, com o intuito de maximizar as informações disponíveis. Deste modo, a observação foi um método de recolha importante, dado que constituiu um instrumento predominante na minha prática reflexiva sobre as aprendizagens dos alunos, permitindo-me ter uma melhor perceção da dinâmica de sala de aula e do raciocínio matemático dos alunos (Stein & Smith, 2009).

É também necessário salientar que a presença do investigador pode modificar o comportamento dos alunos, dado que introduzir uma mudança na sala de aula pode condicionar as reações deles. Porém, uma vez que a turma já está muito familiarizada comigo enquanto professora, porque os acompanhei durante todo o ano letivo, penso que este constrangimento não se notou.

Para auxiliar a observação, realizei também gravações áudio e vídeo que me permitiram a reconstituição de diálogos entre alunos e entre mim e os alunos, durante as discussões em grande grupo, registar acontecimentos que ocorrem em simultâneo, nomeadamente as interações em aula, captar linguagem não verbal e rever sem restrições os acontecimentos para interpretação e análise de dados (Cohen et al., 2000).

4.2. Recolha documental

A recolha documental foi um método central para o estudo que realizei, uma vez que as questões do estudo podem ser respondidas, em grande parte, a partir das informações encontradas nas produções escritas que recolhi. A recolha documental integra as resoluções das tarefas realizadas pelos alunos em sala de aula e o trabalho de casa, incluindo uma composição.

Esta recolha das resoluções das tarefas dos alunos é um método que permite uma análise detalhada das suas estratégias de resolução, dos seus processos de raciocínio, bem como das suas dificuldades nesta temática. Além disso, segundo Silva (2012), ao analisar as resoluções das tarefas ao longo da unidade de ensino é possível perceber a evolução ocorrida nos alunos no que diz respeito à compreensão do conceito de derivada de segunda ordem, à sua aplicação na resolução de problemas de otimização e às dificuldades que manifestaram, nomeadamente quais as que foram superadas ou as que se mantiveram após a lecionação. Para além das vantagens indicadas, este método permite que os dados recolhidos se encontrem no formato em que vão ser analisados, não interferindo com os fenómenos em estudo e encontrem-se na linguagem dos participantes (Bogdan & Biklen, 1994).

Contudo, um dos constrangimentos do uso deste método na recolha de dados é o facto de os alunos, ao escreverem a lápis, muitas vezes apagarem o que escrevem, não permitindo assim ao investigador perceber como este estava a pensar para resolver aquela questão. A estratégia que usei para tentar solucionar este problema foi a seguinte: como a metodologia de trabalho dos alunos em sala de aula é o trabalho a pares, solicitei a resolução apenas de um elemento, escrita a caneta e devolvi-a na aula seguinte, com a correção, após a ter digitalizado. Durante o momento de discussão, os alunos utilizavam a resolução do outro elemento, feita em conjunto, para acompanhar este momento.

Capítulo 5

Análise de dados

Neste capítulo apresento e analiso os dados recolhidos ao longo da subunidade que lecionei, com o objetivo de poder dar resposta às questões do meu estudo. Tendo em conta o objetivo deste estudo e as questões formuladas, este capítulo estrutura-se em três secções: a primeira parte tem a análise das resoluções dos alunos que permitem evidenciar como interpretam a noção de 2ª derivada de uma função e que dificuldades manifestam quando a determinam, em diferentes representações, nomeadamente dificuldades algébricas, numéricas e gráficas. Esta análise tem por base a tarefa 2, questões 1, 2 e 3, a tarefa 3, questão 1, a tarefa 4, questões 2.3 e 3.3 e a tarefa 5, questão 1. A segunda parte será constituída pela análise das resoluções que permitem perceber como os alunos relacionam a 2ª derivada de uma função com a função original e que dificuldades revelam. Para esta parte, vou analisar a tarefa 3, questões 1, 4 e 8, a tarefa 4, questão 3.3 e a tarefa 5, questão 1. A última parte será constituída pela análise das resoluções onde se observam que estratégias e conhecimentos os alunos mobilizam, na resolução de problemas e quais as principais dificuldades que manifestam. Para esta parte, vou analisar a tarefa 4, questões 2.3 e 3.3.

5.1. Noção de 2ª derivada de uma função e dificuldades na sua determinação, em diferentes representações

Nesta secção vou analisar resoluções que permitem evidenciar como os alunos interpretam a noção de 2ª derivada de uma função e que dificuldades manifestam quando a determinam, em diferentes representações, nomeadamente dificuldades algébricas, numéricas e gráficas.

Tal como mostram as duas resoluções seguintes, nas figuras 6 e 7, a maioria dos alunos assume que a segunda derivada diz respeito ao sentido da concavidade da função, sendo que na última o aluno indica explicitamente que o sinal (negativo) da segunda derivada da função corresponde ao sentido da concavidade da função (voltada para baixo, neste caso). A figura 6 aparece como auxiliar na resolução da questão 3.3 da tarefa 4, na qual se pretendia estudar uma função quanto ao sentido das suas concavidades, tendo o aluno escrito inicialmente o que podemos observar na figura, para partir depois para a resolução.

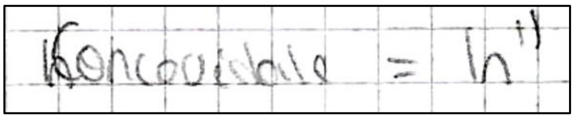


Figura 6 – Resolução de Miguel (Tarefa 4, questão 3.3)

Na tarefa 2, questão 3, apresentavam-se três representações gráficas e era pedido aos alunos para estabelecerem uma correspondência entre a primeira derivada, a segunda derivada e a função original, justificando. Como podemos observar na figura 7, resolução única, o aluno desenhou uma figura para o auxiliar na resposta e concluiu qual a representação que diz respeito à derivada da função, atribuindo significado aos seus zeros como correspondentes aos extremos da função original. Aqui temos evidenciado conhecimento sobre a primeira derivada, o que é bastante interessante, uma vez que o aluno recorre a conhecimentos prévios sobre a relação entre a primeira derivada e a função original para atribuir significado à segunda derivada, utilizando a estratégia que a segunda derivada é a derivada da primeira derivada.

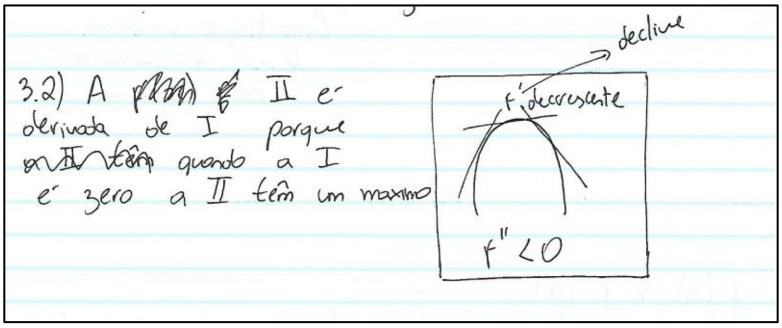


Figura 7 – Resolução de Afonso (Tarefa 2, questão 3.1)

Ainda sobre este significado que os alunos atribuíram à noção de segunda derivada, ou seja, como o seu sinal nos fornece conhecimento sobre o sentido da concavidade da função original, a maioria dos alunos evidencia perceber que quando o sinal da segunda derivada é positivo, então a função original tem a concavidade voltada para cima, que quando o sinal é negativo, a função tem concavidade voltada para baixo e que os pontos de inflexão da função original são os pontos onde a segunda derivada se anula, como evidencia a resolução abaixo, figura 8. A aluna foi capaz de concluir sobre as concavidades da função, estudando o sinal da segunda derivada e construindo um quadro de sinal corretamente, indicando os intervalos corretos onde a concavidade é voltada para cima e onde é voltada para baixo e, ainda, os pontos de inflexão do gráfico. É de salientar que uma parte significativa dos alunos seguiu esta resolução, levando-me a concluir que atribuíram o significado correto a esta noção de segunda derivada.

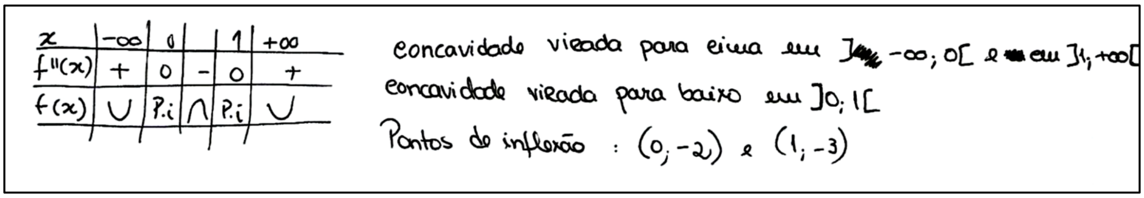


Figura 8 – Resolução de Patrícia (Tarefa 3, questão 1.c)

Porém, nalgumas resoluções de alunos, esta construção do quadro e conclusões não estão corretas, evidenciando dificuldades numéricas. Como podemos observar na figura 9, que exemplifica uma minoria das suas resoluções, a aluna começou por indicar que o domínio da função é $\mathbb{R}$, determinou o ponto de inflexão, mas quando preencheu o quadro indica que a função não tem significado de $]-\infty, -1[$ e de $]-1, +\infty[$. Tendo em conta que a aluna não voltou a cometer este erro, creio que ela pensou que colocar os sinais ou riscar, a levariam à mesma conclusão e, por isso, não seria necessário preencher o quadro todo, podendo abreviar o preenchimento com as colunas riscadas. Contudo, este preenchimento de quadro não está correto, levando a que este fique pouco rigoroso.

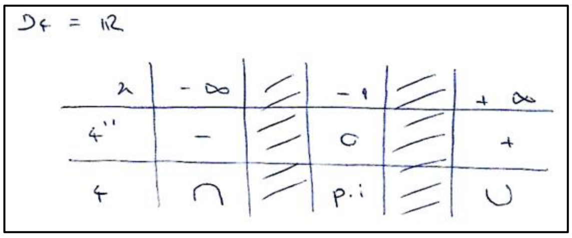


Figura 9 – Resolução de Mónica (Tarefa 3, questão 1.b)

Ainda nesta tarefa, um aluno também apresentou um quadro de sinal com diferentes notações (o s.s. e um risco), como podemos observar na figura 10, que também corresponde a uma minoria de resoluções. Neste caso, a função não estava definida para o intervalo$]-1,1[$ e o aluno apenas indicou que os pontos $x = -1$ e $x = 1$ não têm significado, tendo riscado o resto. Deste modo, não é claro se o aluno compreende que os pontos restantes do intervalo também não têm significado ou se não sabia que podia indicar que um intervalo não tem significado.

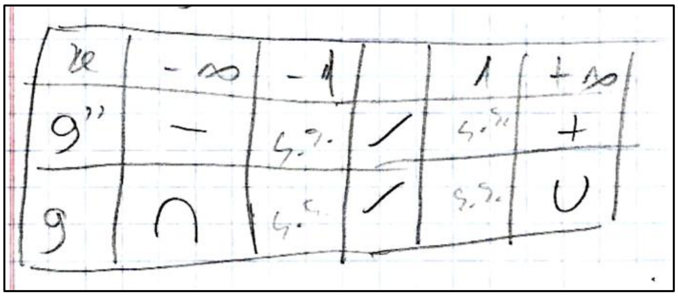


Figura 10 – Resolução de Tiago (Tarefa 5, questão 1.b)

No que respeita à construção do quadro de sinais, podemos ainda observar, na resolução da figura 11, que o aluno evidencia uma dificuldade numérica ao não colocar as linhas e colunas e ao não concluir que o $x = 2$ é um ponto de inflexão. Apesar da resolução ser única, o preenchimento do quadro não está correto e apresenta-se pouco rigoroso.

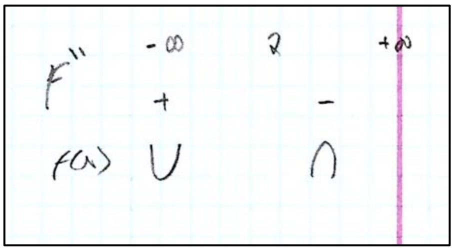


Figura 11 – Resolução de António (Tarefa 5, questão 1.a)

Uma outra noção bastante importante que eu pretendia que os alunos compreendessem é que um ponto onde a segunda derivada se anula ou um ponto onde as concavidades mudam de sentido não é obrigatoriamente um ponto de inflexão da função. Esta questão foi trabalhada na aula a partir da exploração do exemplo da função $f(x) = x^4$, cuja segunda derivada se anula para $x = 0$ mas onde a função não tem nenhum ponto de inflexão. Observando a resolução abaixo, figura 12, e tendo em conta que esta foi a resolução apresentada pela maioria dos alunos, parece-me que os alunos atribuíram o significado correto a esta noção.

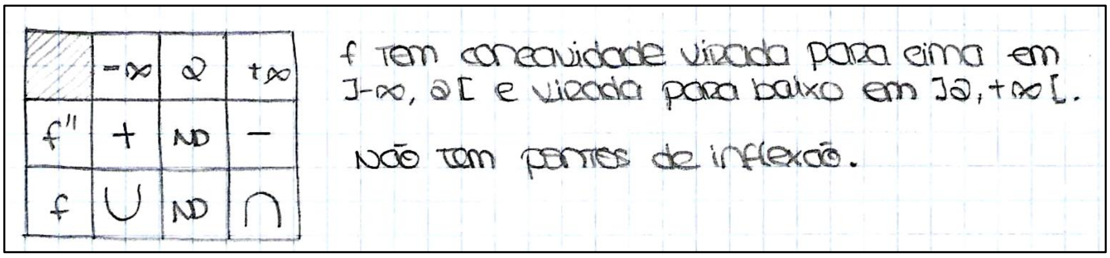


Figura 12 – Resolução de Diana (Tarefa 5, questão 1.a)

Na figura 12, apesar da função mudar o sentido da sua concavidade no ponto $x = 2$, este não é um ponto de inflexão porque não está definido, tendo anteriormente os alunos concluído que $x = 2$ é assíntota vertical da função f.

Apesar da maioria dos alunos ter evidenciado compreender esta noção, identificaram-se erros nalguns casos. Um dos erros cometido por poucos alunos na elaboração dos quadros de sinal é a atribuição de significado da função a pontos que não pertencem ao domínio. Por exemplo, na figura 13 abaixo, a aluna indica corretamente que a segunda derivada não tem significado para o ponto $x = 2$, mas depois utilizou uma notação diferente (um risco) na linha do quadro correspondente à função. Deste modo não fica claro se a aluna compreende que a função não tem significado para o ponto $x = 2$.

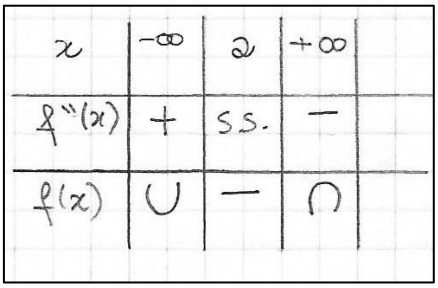


Figura 13 – Resolução de Anabela (Tarefa 5, questão 1.a)

Na figura 14, uma outra aluna conclui erradamente que $x = 2$ anulava $f''(x)$, uma vez que $x = 2$ anula o denominador, ou seja, a função $f''(x)$ não tem zeros. Porém, apesar de indicar que $x = 2$ é zero da segunda derivada, referiu que não era um ponto de inflexão da função original, uma vez que a função original tem uma assíntota vertical para esse valor. Deste modo, parece que a dificuldade da aluna diz respeito à resolução algébrica e não à compreensão do significado da segunda derivada atribuído ao ponto onde esta se anula.

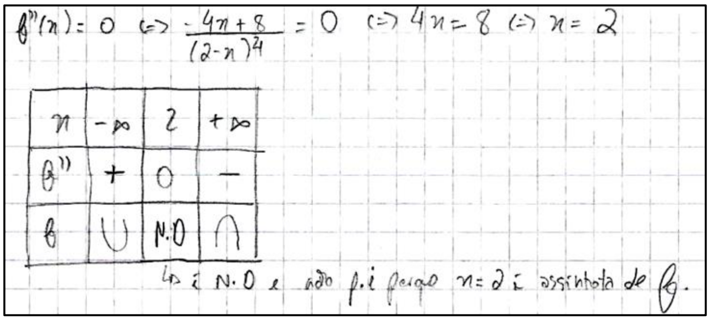


Figura 14 – Resolução de Bruna (Tarefa 5, questão 1.a)

Como podemos observar na figura 15, o aluno conclui de imediato que o ponto que anula a segunda derivada é um ponto de inflexão da função original, o que está incorreto, tendo este erro de tradução/interpretação entre representações algébrica e gráfica sido cometido apenas por este aluno. O aluno começa por determinar, de forma incorreta, o domínio da função e conclui que é o intervalo $[0, +\infty[$. Depois calculou incorretamente o zero da segunda derivada, mas apesar de ter concluído que o ponto $x = 0$ anulava a segunda derivada, este ponto não poderia ser ponto de inflexão, visto que é onde se inicia o domínio. Portanto, o aluno não construiu o quadro corretamente, porque cometeu erros na interpretação do enunciado, no cálculo algébrico e no conceito de ponto de inflexão, mais especificamente na identificação do domínio, no zero da segunda derivada e na conclusão do ponto de inflexão, respetivamente.

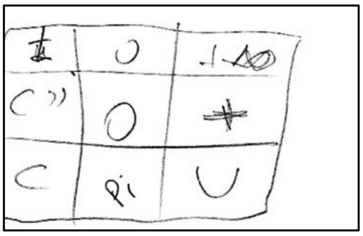


Figura 15 – Resolução de Tiago (Tarefa 4, questão 2.3)

Na tarefa 5, questão 1.a, era pedido aos alunos para estudarem uma função, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos e para a representarem graficamente. Na figura 16, podemos observar uma resolução da questão cuja estratégia foi seguida por alguns alunos. Neste exemplo, a aluna começa por determinar o domínio da função e estudar as suas assíntotas, concluindo que $x = 2$ é assíntota vertical do gráfico. Porém, quando preenche o quadro indica que em $x = 2$ tem um ponto de inflexão da função original, evidenciando dificuldade concetual, neste caso, dificuldade no conceito de ponto de inflexão, uma vez que, pela conclusão da aluna, este não necessitaria de pertencer ao domínio da função original.

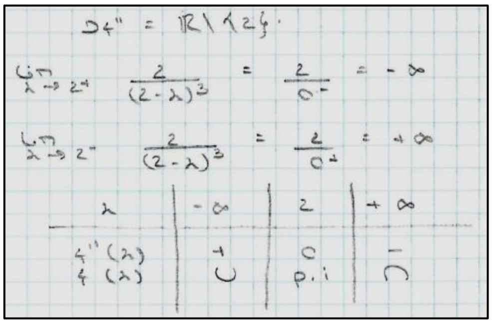


Figura 16 – Resolução de Mónica (Tarefa 5, questão 1.a)

Um outro exemplo desta dificuldade é apresentado na figura 17, de seguida. Na mesma questão, um aluno considera incorretamente que $x = 2$ é zero da segunda derivada, como se observa na primeira linha do quadro de sinais, mas reconhece que esse ponto não está definido para a função original. Contudo, na sua resposta, o aluno indica que a função tem um ponto de inflexão em $(2, f(2))$. Deste modo, o aluno evidencia que não compreende que para ser ponto de inflexão, o ponto tem de pertencer ao domínio da função.

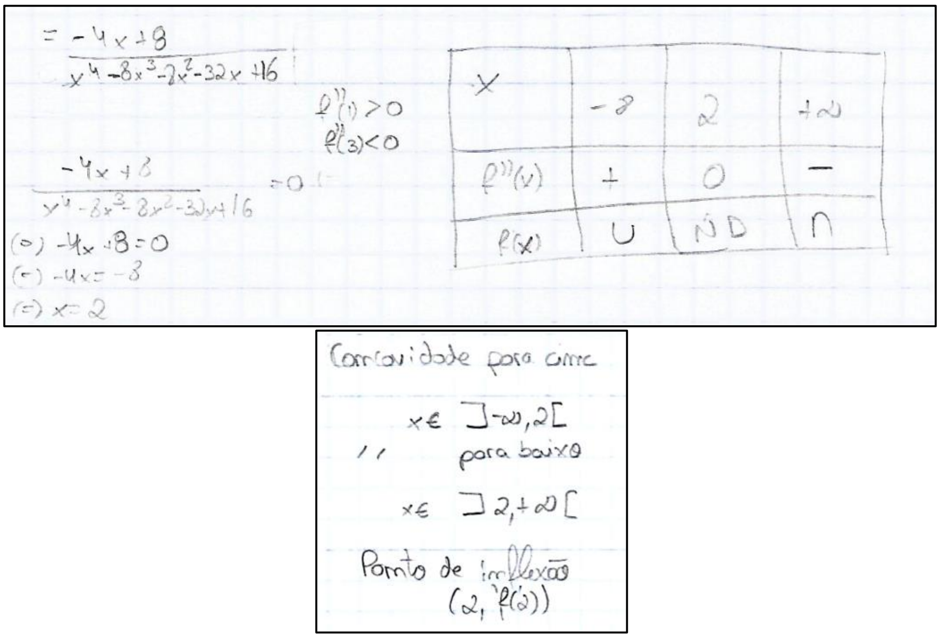


Figura 17 – Resolução de Luís (Tarefa 5, questão 1.a)

No entanto, dos erros acima apresentados, a maior parte dos alunos só desconsiderou o domínio da função, sendo esta uma dificuldade numérica. Isto é, nas tarefas que os alunos realizaram, a maioria das funções dependiam do tempo, pelo que tinham de ter em consideração que não existem tempos negativos aquando da construção do quadro. Noutros casos, era indicado o domínio da função no enunciado e os alunos utilizavam outro domínio. Em algumas resoluções, os alunos assumiram que, independentemente da função considerada, o domínio era $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}_0{}^+$. Este erro pode ter origem, respetivamente, no hábito dos alunos trabalharem com funções polinomiais, cujo domínio é $\mathbb{R}$ e no facto de o tempo ser positivo, ou seja, indicam que o domínio é $\mathbb{R}_0{}^+$ e esquecem o limite superior indicado no enunciado.

Na tarefa 4, questão 2, era fornecida uma função algébrica e era dada a indicação no enunciado que $t \geq 0$, sendo t o tempo. Como podemos observar na figura 18 abaixo, o aluno, aquando da construção do quadro de sinal, desconsiderou essa informação e colocou que o domínio da função era ℝ, o que está incorreto.

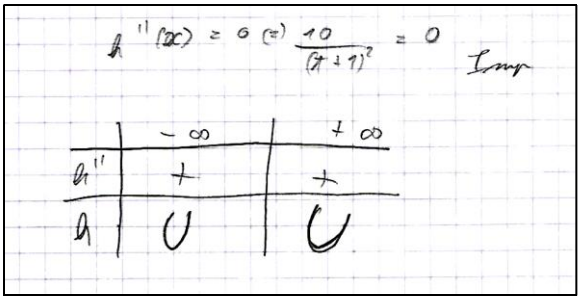


Figura 18 – Resolução de Carlos (Tarefa 4, questão 3.3)

Na questão 3 da tarefa 2 era fornecido um gráfico com as representações gráficas da função original e da primeira e segunda derivada. Perguntava-se aos alunos para indicarem a correspondência correta, uma vez que pretendia que fossem capazes de traduzir a informação entre representações. Na questão 3.1. era perguntado se a representação II poderia corresponder à função original e a III à sua segunda derivada. Uma das respostas corretas, exemplificativa da maioria das respostas dos alunos, encontra-se na figura 19, onde o aluno indica que se a representação II correspondesse à função original (que tem concavidade voltada para baixo), a representação da segunda derivada tinha de ser sempre negativa, o que não acontece. Deste modo, o aluno evidencia ter a noção de segunda derivada consolidada e conseguiu traduzir corretamente a informação do gráfico articulando o sinal da segunda derivada com a concavidade da função original.

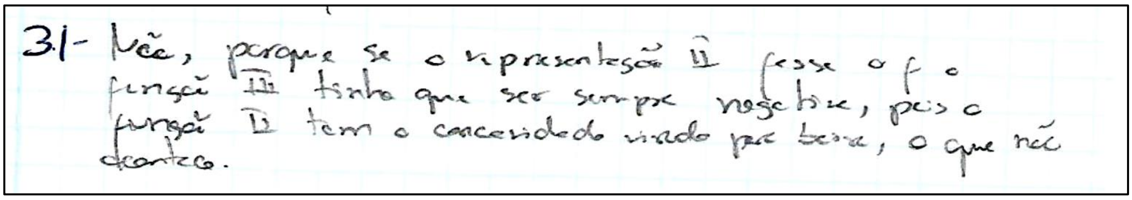


Figura 19 – Resolução de Jesus (Tarefa 2, questão 3)

Contudo, evidenciaram-se algumas dificuldades relacionadas com a tradução das representações gráficas das funções originais nas suas respetivas segundas derivadas. Estas dificuldades estão associadas, maioritariamente, à interpretação dos gráficos e à tradução entre representações, isto é, tradução da informação presente nos gráficos para linguagem corrente.

Como é possível observar na figura 20, que reflete a resolução de alguns alunos, a aluna respondeu acertadamente, mas a sua justificação está incorreta, escrevendo que a associação não seria possível uma vez que a segunda derivada não tinha zeros no máximo da função original. Nesta resposta, a aluna parece estar a confundir a primeira derivada com a segunda, porque os zeros da primeira derivada podem corresponder a máximos da função original, mas os zeros da segunda derivada não. Estes podem corresponder a pontos de inflexão, pelo que a resposta não faz sentido, concluindo que a aluna teve dificuldade no conceito de segunda derivada, ou seja, apresenta uma dificuldade concetual.

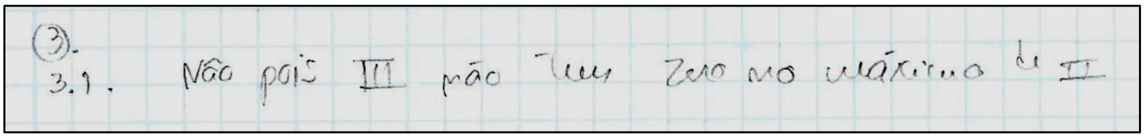

(3).
3.1. Não pois III não tem zero no máximo de II

Figura 20 – Resolução de Patrícia (Tarefa 2, questão 3)

Uma outra resolução que despertou a minha atenção foi a resposta que apresento na figura 21, apesar de ser única. A aluna indica que a correspondência não pode ser estabelecida devido ao grau das funções, isto é, escreveu que a representação da função original se assemelha a uma função polinomial de grau 2 e, assim sendo, a sua respetiva segunda derivada seria uma função constante, o que não acontece. A estratégia da aluna, que recorre à regra de diminuir o grau de uma função quando a deriva, pode ser correta para uma função polinomial, mas não o é para funções de outro tipo. Assim, tendo em conta que ela não pode generalizar e retirar este tipo de conclusões sem ter a certeza que a função f é polinomial, como o enunciado não nos fornece essa informação, a sua justificação não está correta. A aluna pensou que a função f era uma função polinomial, porque, pelo gráfico apresentado, ela assemelhava-se a uma parábola.

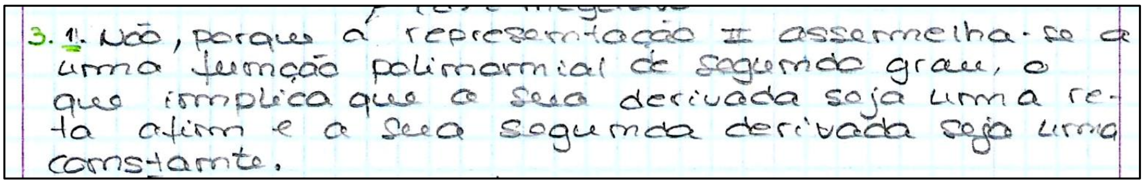

3.1. Não, porque a representação II assemelha-se a uma função polinomial de segundo grau, o que implica que a sua derivada seja uma reta afim e a sua segunda derivada seja uma constante.

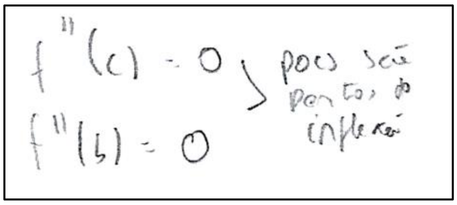
Figura 21 – Resolução de Francisca (Tarefa 2, questão 3)

Apesar de a resolução ser única, esta dificuldade surgiu numa discussão em grande grupo. O aluno Martim indicou que podemos diferenciar a função original da segunda derivada, através da comparação dos graus, isto é, a função original será de dois graus acima da segunda derivada, o que levou ao seguinte diálogo, para clarificação desta conceção errónea que só será válida quando estamos no âmbito de funções polinomiais:

> Professora: Quando o Martim utiliza o raciocínio dos graus para dizer o que é a derivada e o que é a função original, está certo se as funções forem polinomiais, ok?
>
> Aluno: Mais ou menos.
>
> Professora: Naquele exercício 3 [refiro-me à questão 3, da Tarefa 2] que nós tínhamos feito, tu utilizaste essa justificação oralmente e eu disse que estava bem, mas nada nos garantia que as funções eram polinomiais e tu não tinhas a expressão analítica das funções. Portanto nós só podemos observar pelas funções que uma tem o grau menor que a outra se soubermos que as funções são polinomiais. As funções polinomiais são as da forma x^a, com $a \in \mathbb{R}$. Certo?
>
> Alunos: Ah, sim.
>
> Professora: Por exemplo, se trabalharmos com logaritmos ou exponenciais, já não podemos comparar o grau. Toda a gente percebeu?
>
> Alunos: Sim.

Após este diálogo, a dúvida parece-me ter ficado esclarecida pois, posteriormente, não identifiquei nenhuma resolução em que os alunos tenham voltado a cometer esta incorreção.

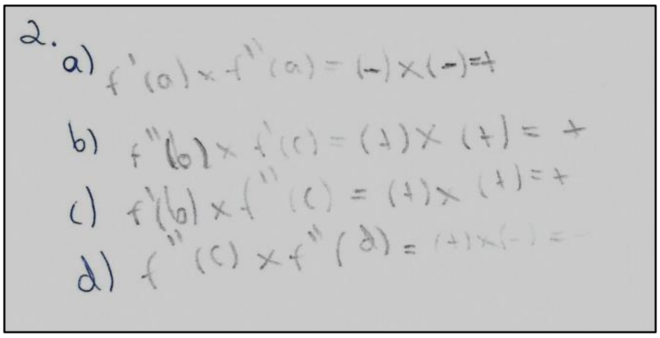
Na tarefa 2, questão 2, a partir da representação gráfica de uma função f, os alunos necessitavam de retirar conclusões quanto ao sinal da primeira e segunda derivada em determinados pontos específicos, exigindo a interpretação da representação. Como podemos observar na figura 22, que apresenta uma resolução única, o aluno indica incorretamente que os pontos $x = c$ e $x = b$ são pontos de inflexão, pelo que a segunda derivada se anula. No ponto $x = b$, o gráfico tem a concavidade voltada para cima e no ponto $x = c$, o gráfico tem a concavidade voltada para baixo, logo $f''(c) < 0$ e $f''(b) > 0$, pelo que a função não muda de concavidade em nenhum dos pontos que o aluno indicou. A interpretação do gráfico também permitia perceber que este só muda de concavidade uma vez, pelo que não poderia ter dois pontos de inflexão. Nesta situação o aluno poderá ter tido dificuldades na interpretação da representação gráfica da função, provavelmente por ser a representação menos utilizada em sala de aula.



$f''(c) = 0$ } pois são pontos de inflexão
$f''(b) = 0$

Figura 22 – Resolução de Miguel (Tarefa 2, questão 2)

Ainda na mesma questão, podemos observar na figura 23 a resolução de um outro aluno que indicou incorretamente os sinais correspondentes à segunda derivada em pontos específicos, mas que reflete o trabalho realizado por uma minoria de alunos. No ponto $x = a$, o gráfico tem concavidade voltada para cima e o aluno indicou incorretamente que $f''(a) < 0$, tal como no ponto $x = c$, em que o gráfico tem concavidade voltada para baixo e o aluno indicou que $f''(c) > 0$. Como no ponto $x = a$ a função é decrescente e no ponto $x = c$ a função é crescente, o aluno pode ter associado os sinais $+$ e – da segunda derivada com o crescimento ou decrescimento, respetivamente, da função nesses pontos. Deste modo, o aluno evidencia dificuldade em interpretar diferenciadamente a primeira e a segunda derivada de uma função, quando esta é apresentada graficamente.



2.
a) $f'(a) \times f''(a) = (-) \times (-) = +$
b) $f''(b) \times f'(c) = (+) \times (+) = +$
c) $f'(b) \times f''(c) = (+) \times (+) = +$
d) $f''(c) \times f''(d) = (+) \times (-) = -$

Figura 23 – Resolução de Mário (Tarefa 2, questão 2)

Nessa mesma questão, um outro aluno indicou corretamente os sinais associados à segunda derivada naqueles pontos, mas parece fazê-lo com incerteza. Na figura 24 abaixo é possível constatar que o aluno atribuiu corretamente significado ao sinal da segunda derivada, associando-o à concavidade da função original nesse ponto, porém colocou pontos de interrogação na sua resolução sempre que estabeleceu essa relação. Em conversa informal com o aluno, registada nas minhas notas de campo, pude entender que é sua interpretação não ser possível indicar a concavidade de uma função num ponto, por esta ser inerente à função e não ao ponto. Embora este conceito de concavidade de uma função tenha sido discutido em sala de aula, parece que se mantêm algumas dúvidas.

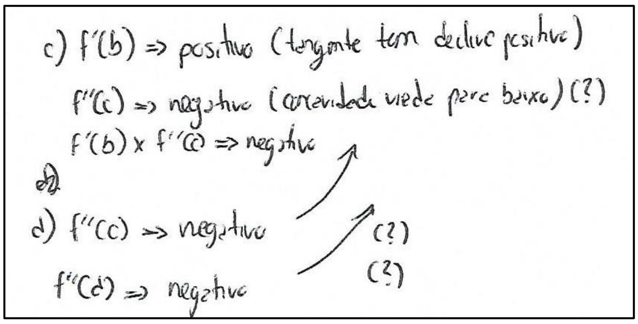


Figura 24 – Resolução de Martim (Tarefa 2, questão 2)

Em termos de dificuldades algébricas, as que surgiram estão principalmente associadas às regras de derivação de funções exponenciais, potências e raízes e à derivação de operações de funções, como o produto ou o quociente. Na resolução abaixo, figura 25, podemos observar que o aluno optou por derivar a função exponencial 7^{-x}, transformando-a primeiramente num quociente $\frac{1}{7^x}$. Porém, aquando da derivação, confundiu a função exponencial 7^x com a potência $7x$, o que levou à aplicação de uma regra de derivação diferente e a um resultado errado.

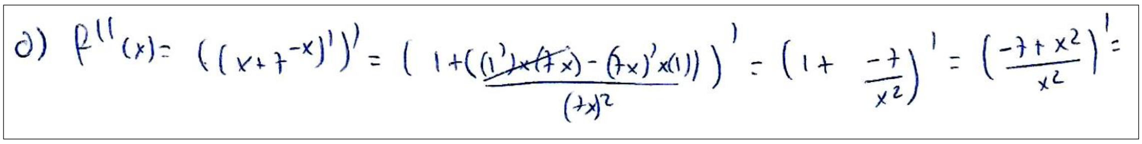


Figura 25 – Resolução de Tiago (Tarefa 2, questão 1.d)

Relativamente a dificuldades concetuais, alguns alunos confundiram a função potência com a função exponencial, evidenciando um erro concetual na definição de função. Como podemos observar na figura 26, exemplo da resolução de alguns alunos, o aluno identifica a função 7^{-x} como potência e não como uma exponencial, levando-o a uma aplicação incorreta da regra de derivação.

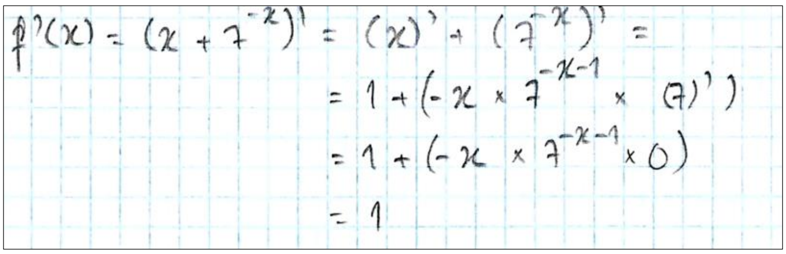


Figura 26 – Resolução de Miguel (Tarefa 2, questão 1.d)

Por último, na figura 27, podemos também constatar a resolução de outro aluno que cometeu o mesmo erro concetual confundindo uma exponencial com uma potência. Mas neste caso, mesmo que o aluno estivesse a derivar uma potência, falta no seu raciocínio multiplicar pela derivada da base (pela derivada de 7). Deste modo, para além do aluno não ter identificado corretamente a função, também aplicou a regra de forma incorreta.

$$f(x) = x + 7^{-x}$$
$$f'(x) = 1 + (-x 7^{-x-1})$$
$$f''(x) = 0 + (-x-1)(-x)7^{-x-2} =$$
$$= (x^2+x)7^{-x-2} = \frac{x^2+x}{7^{(x+2)}}$$

Figura 27 – Resolução de Hugo (Tarefa 2, questão 1.d)

O aluno cuja resolução apresentei na figura 25 cometeu um outro erro, na mesma questão, como mostra a figura 28. Nesta questão pretendia-se derivar $f(x) = 4ln^2(x)$ e o aluno começou por decompor em fatores $f(x) = 4ln(x) \times \ln(x)$ e depois derivou incorretamente o produto de $ln(x) \times \ln(x)$ como o produto das derivadas.

$$f''(x) = \left(4\left(\frac{1}{x} \times \frac{1}{x}\right)\right)^2 =$$

Figura 28 – Resolução de Tiago (Tarefa 2, questão 1.a)

Observando a figura 29 seguinte, é possível constatar que o aluno teve dificuldade em aplicar a regra da derivada de uma potência, esquecendo-se de multiplicar pela derivada da base que era diferente de x, o que levou a um resultado incorreto. Porém, o aluno riscou o denominador onde anteriormente tinha colocado x, caso em que estaria correto, o que me leva a conjeturar que o aluno pode saber aplicar a regra da potência, mas não está seguro. Na determinação da segunda derivada, o aluno aplica corretamente a regra, mas pelo que apresenta não é percetível se está a utilizar a regra da potência ou a regra do produto por uma constante.

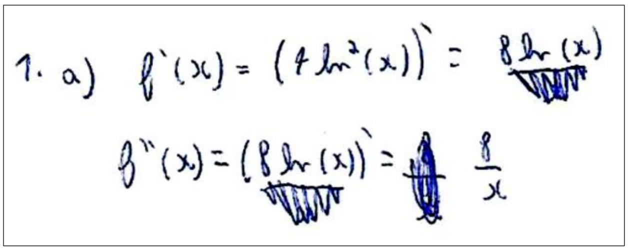


Figura 29 – Resolução de Nuno (Tarefa 2, questão 1.a)

Na aplicação das regras de derivação, alguns alunos evidenciaram dificuldades na regra do quociente, sendo que o erro mais frequente é a não inclusão do denominador na expressão derivada, como está evidenciado na figura 30, onde podemos observar que o aluno começou por aplicar corretamente a regra do quociente, mas depois esqueceu-se do denominador.

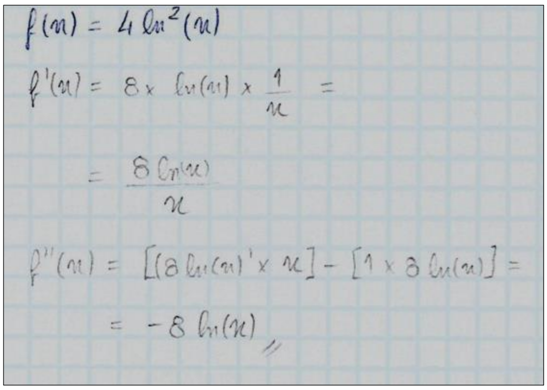


Figura 30 – Resolução de Miguel (Tarefa 2, questão 1.a)

Outra dificuldade algébrica que pude identificar nas resoluções dos alunos foi a aplicação da regra de derivação da raiz quadrada. Algumas vezes, os alunos transformam a raiz quadrada numa potência de $\frac{1}{2}$ mas depois não a derivam, possivelmente porque como já fizeram uma transformação na expressão algébrica da função, não sentem necessidade de fazer outra. Como podemos observar na figura seguinte 31, a aluna aplicou a regra do quociente, porém escreveu que $(\sqrt{x^2-1})' = (x^2-1)^{\frac{1}{2}}$, o que não é correto. A aluna simplesmente transformou a raiz numa potência, em vez de ter escrito $(\sqrt{x^2-1})' = [(x^2-1)^{\frac{1}{2}}]'$.

$$g(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$g'(x) = \frac{(x)' \cdot (\sqrt{x^2-1}) - (x) \cdot (\sqrt{x^2-1})'}{x^2-1} = \frac{\sqrt{x^2-1} - (x) \cdot ((x^2-1)^{1/2})'}{x^2-1}$$

Figura 31 – Resolução de Patrícia (Tarefa 5, questão 1.b)

Em suma, os alunos interpretam a segunda derivada de diversas formas e reconhecem-na em diferentes representações. Uma das interpretações identificadas diz respeito à concavidade da função original, em que os alunos associam o sinal da segunda derivada ao sentido da concavidade da função. Os alunos também interpretam os pontos onde a segunda derivada se anula como os pontos de inflexão da função original, mas revelam compreender que o anulamento da segunda derivada não obriga a que esse ponto seja de inflexão na função original, caso não esteja definido. É de salientar, ainda, que os alunos foram capazes de interpretar a segunda derivada em diferentes representações e de as articular. No caso da representação algébrica, os alunos foram capazes de determinar a expressão analítica da função segunda derivada, aplicando as regras de derivação. Na representação numérica, os alunos conseguiram construir os quadros de sinal e preenchê-los corretamente de forma a retirarem conclusões sobre o sentido das concavidades da função original e os seus pontos de inflexão. Por último, na representação gráfica, os alunos conseguiram interpretar e traduzir a informação desta para linguagem corrente, apesar de ser a representação onde evidenciam mais dificuldades.

Apesar da maioria dos alunos ter compreendido as noções acima descritas, existiram algumas dificuldades. Estas são do tipo algébricas, numéricas e gráficas, em termos de representações e do tipo concetual. As dificuldades algébricas estão relacionadas com a aplicação das regras de derivação, nomeadamente de operação de funções. No caso do produto, os alunos derivavam isoladamente cada parcela e multiplicavam-nas, posteriormente e no quociente, eles não incluíam o denominador na expressão derivada. Relativamente à derivação de funções exponenciais e potências, a maior dificuldade era concetual, uma vez que os alunos confundiam estas duas funções e, por isso, aplicavam a regra de derivação incorreta. Esta dificuldade poderá ter origem no pouco destaque que é atribuído à derivada da função exponencial aquando do início da sua lecionação. Por último, na derivação de raízes, eles transformavam-na numa função potência e esqueciam-se de a derivar depois, o que poderá ter origem na passagem/transformação inicial que têm de realizar. As dificuldades numéricas prendem-se com a construção do quadro de sinal da segunda derivada, mais especificamente com o rigor e formato, a determinação do domínio da função a estudar, o reconhecimento dos pontos sem significado da função e a conceção errada de que um ponto onde a segunda derivada se anula é necessariamente um ponto de inflexão. Por último, as dificuldades gráficas estão relacionadas com a interpretação dos gráficos e com a tradução entre representações, isto é, tradução da informação presente nos gráficos para linguagem corrente.

5.2. Relação da segunda derivada com a função original e dificuldades nessa relação

Para fazerem o estudo completo de uma função, os alunos para além de evidenciarem diversos conhecimentos sobre a noção de segunda derivada precisam de ser capazes de a relacionar com a função original.

Vou começar por remeter para a figura 19, da secção acima. Essa resolução permite evidenciar que a maioria dos alunos consegue relacionar a função original com a sua segunda derivada, nomeadamente relacionar o sentido das concavidades da função original com o sinal da segunda derivada, quando está envolvida uma representação gráfica.

Apesar disso, alguns alunos revelaram dificuldade em estabelecer essa relação, quando ambas as representações envolvidas são representações gráficas e quando uma delas é gráfica e a outra é algébrica. Na tarefa 3, questão 8, eram fornecidas três representações gráficas e pedia-se aos alunos que identificassem qual a que correspondia à primeira derivada e à segunda derivada. Como podemos observar na resolução apresentada na figura 32, um aluno indica que quando a função é positiva, então a concavidade da segunda derivada é voltada para cima e quando a função é negativa, a concavidade da segunda derivada é voltada para baixo. Esta confusão entre as propriedades da função derivada de segunda ordem e da função original pode estar associada à mecanização de procedimentos, levando o aluno a reconhecer a existência da relação entre a segunda derivada e a função original, mas a não lhe atribuir significado.

Figura 1 corresponde a f'' pois
- porque o outro gráfico era uma representação de $f'(x)$
- os zeros de $f''(x)$ correspondem aos máximo e mínimos de $f'(x)$
- quando $f(x)>0$, a concavidade de $f''(x)$ nesse intervalo está virada para cima
- quando $f(x)<0$, a concavidade de $f''(x)$ nesse intervalo está virada para baixo.

Figura 32 – Resolução de Lourenço (Tarefa 3, questão 8)

Ainda na mesma questão, um outro aluno confundiu extremos com pontos de inflexão, como podemos observar na figura 33. O aluno não identifica corretamente qual o gráfico que corresponde à segunda derivada pois parte de uma justificação incorreta, indicando que quando a segunda derivada se anula, esses pontos correspondem a extremos da função original. Este aluno parece não compreender ainda o que são pontos de inflexão e extremos de uma função ou não os reconhece quando está envolvida uma representação gráfica. Esta dificuldade também pode advir do facto do conceito de ponto de inflexão ser novo para o aluno e de no trabalho prévio com derivadas (de primeira ordem), o significado de extremo de uma função estar associado ao seu anulamento, levando o aluno a cometer um erro de transposição para a segunda derivada. Portanto, este aluno não conseguiu relacionar a segunda derivada com a função original, graficamente.

A figura 2 é $f''(x)$ pois quando $f''(x)=0$ corresponde a um máximo ~~da~~ ou mínimo da função $f(x)$.
~~A figura 1 é $f'(x)$ pois os seus máximos e mínimos zeros~~ logo a figura 1 é $f'(x)$.

Figura 33 – Resolução de Afonso (Tarefa 3, questão 8)

Para além de relacionarem o sentido das concavidades da função original com o sinal da segunda derivada, os alunos também evidenciaram serem capazes de estabelecer a relação entre os pontos de inflexão da função original com os zeros da segunda derivada. A resolução que apresento na figura 34, exemplificativa do trabalho realizado por uma parte significativa dos alunos da turma, diz respeito à questão 8 da tarefa 3, que referi acima. Nesta resolução, podemos constatar que a aluna identificou corretamente qual a figura que correspondia à segunda derivada e justificou a sua escolha a partir da relação que estabeleceu, respetivamente, entre o sentido das concavidades e os pontos de inflexão da função original e o sinal e os zeros da segunda derivada.

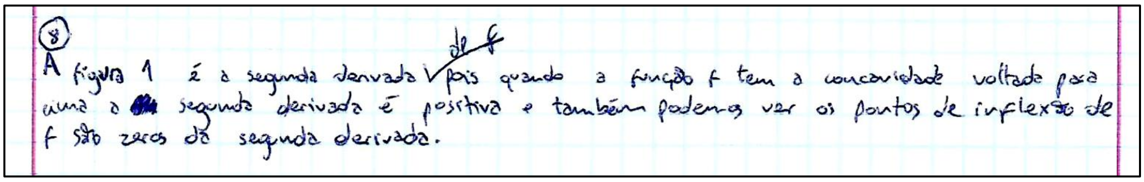

8
A figura 1 é a segunda derivada de f pois quando a função f tem a concavidade voltada para cima a segunda derivada é positiva e também podemos ver os pontos de inflexão de f são zeros da segunda derivada.

Figura 34 – Resolução de Bruna (Tarefa 3, questão 8)

Apesar da maioria dos alunos da turma ter reconhecido a relação entre os pontos de inflexão da função original e os zeros da segunda derivada, alguns alunos cometeram erros que revelam falta de compreensão dessa relação. Na questão 4 da tarefa 3 era fornecida a representação gráfica da segunda derivada de uma função e era pedido para os alunos identificarem se as informações sobre a função original presentes nas alíneas eram verdadeiras ou não e justificarem o porquê. Como podemos observar na figura 35 seguinte, ao resolver a questão, uma aluna afirma que, como a função original tem dois zeros, então a segunda derivada vai ter, pelo menos, um ponto de inflexão. Esta afirmação não está correta e evidencia fragilidade na compreensão das propriedades de uma função e das relações que se podem estabelecer com as suas derivadas.

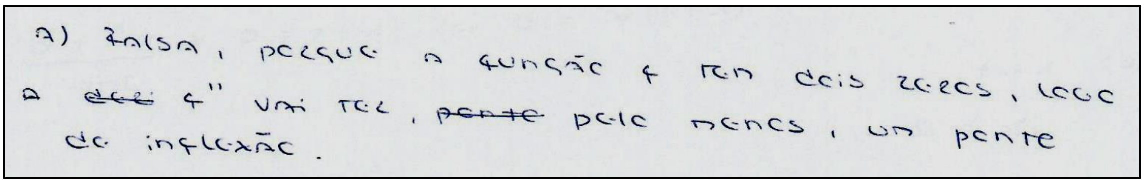
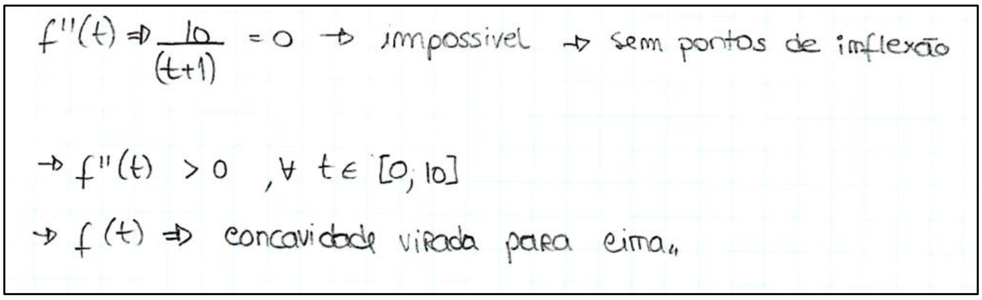

a) Falsa, porque a função f tem dois zeros, logo a ~~der~~ f'' vai ter, ~~ponto~~ pelo menos, um ponto de inflexão.

Figura 35 – Resolução de Mónica (Tarefa 3, questão 4)

Quando se relaciona o sinal da segunda derivada com o sentido das concavidades da função original, pode-se utilizar o quadro de sinal para concluir essa relação (resolução numérica), mas também pode-se estudar o sinal da segunda derivada analiticamente (resolução algébrica). Na tarefa 4, questão 3.3, era solicitado aos alunos que estudassem uma função quanto ao sentido das concavidades, sem indicação da estratégia a seguir. A maioria dos alunos responderam como a aluna cuja resolução apresento na figura 36. A aluna começou por determinar a expressão analítica da segunda derivada e calcular os valores que a anulavam. Como a segunda derivada não se anulava, concluiu que a função original não tem pontos de inflexão, ou seja, ou tem sempre concavidade voltada para cima ou para baixo, no seu domínio. Em vez de construir o quadro de sinal, como se apercebeu que a expressão da segunda derivada era um quociente de funções e que ambas eram positivas no domínio apresentado, concluiu que o seu quociente também o é e, consequentemente, a função tem concavidade voltada para cima. Apesar de no excerto da figura não estar explícito todo este raciocínio da aluna, foi possível descrevê-lo a partir das notas de campo que elaborei durante a aula em que a tinha questionado. Portanto, tal como a maioria dos alunos, a aluna conseguiu relacionar a função original com a sua segunda derivada utilizando uma resolução algébrica.

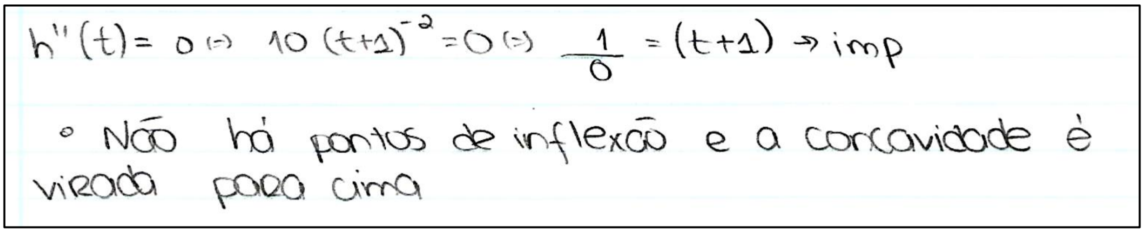

$f''(t) \Rightarrow \frac{10}{(t+1)} = 0 \rightarrow$ impossivel $\rightarrow$ sem pontos de inflexão

$\rightarrow f''(t) > 0 \ , \forall\ t \in [0; 10]$

$\rightarrow f(t) \Rightarrow$ concavidade virada para cima.

Figura 36 – Resolução de Patrícia (Tarefa 4, questão 3.3)

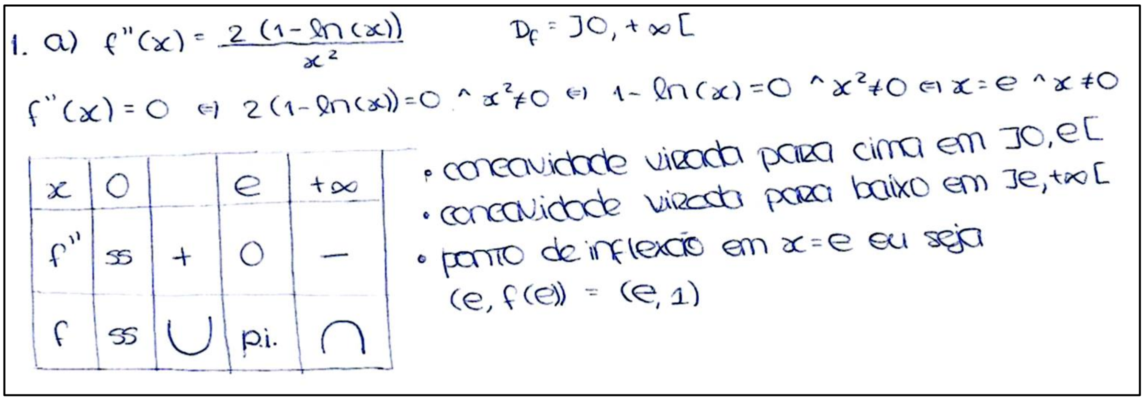
Alguns alunos, contudo, não justificaram as suas conclusões. Como podemos observar na figura 37 abaixo, a aluna reconheceu que a segunda derivada não se anulava, tendo concluído de imediato que a função original tinha a concavidade voltada para cima. Esta resolução está incompleta, pois falta a indicação do sinal da segunda derivada, para poder retirar conclusões quanto ao sentido das concavidades da função original. Deste modo, não é possível afirmar que a aluna compreende a relação que estabelece entre propriedades da função original e da sua segunda derivada, numa representação algébrica, pois não sabemos se a resposta correta da aluna está apoiada num raciocínio também correto não evidenciado, por exemplo recorrendo à calculadora.


$h''(t) = 0 \Leftrightarrow 10(t+1)^{-2} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{0} = (t+1) \rightarrow$ imp

• Não há pontos de inflexão e a concavidade é virada para cima

Figura 37 – Resolução de Tânia (Tarefa 4, questão 3.3.)

Na tarefa 3, questão 1 era solicitado aos alunos que estudassem o sentido das concavidades e pontos de inflexão de funções representadas graficamente. De seguida, na figura 38, apresento uma resolução que reflete o trabalho de alguns alunos que evidenciam compreensão sobre a relação entre função original e segunda derivada. A aluna começou por escrever o domínio, o que é um dado muito importante para o preenchimento do quadro de sinal, determinou o ponto em que a segunda derivada se anula e construiu corretamente o quadro de sinal. Posteriormente concluiu, acertadamente, o sentido das concavidades e o ponto de inflexão da função original. Esta resolução destaca-se pela sua completude e rigor porque a aluna tem o cuidado de indicar todos os procedimentos que segue no estudo de uma função, que se encontram corretos, evidenciando se capaz de relacionar as propriedades da segunda derivada com as da função original, recorrendo ao quadro de sinal, ou seja, a uma resolução numérica.



1. a) $f''(x) = \frac{2(1-\ln(x))}{x^2}$ $D_f =]0, +\infty[$

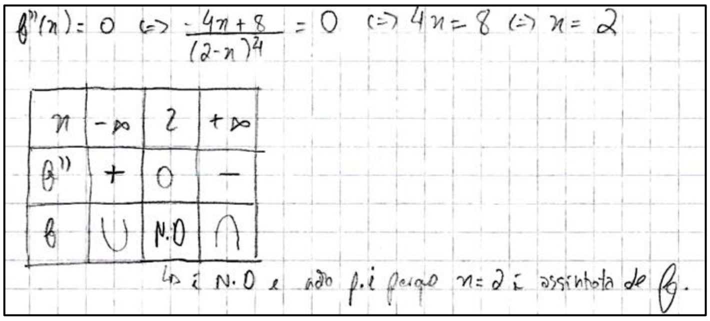
$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2(1-\ln(x)) = 0 \wedge x^2 \neq 0 \Leftrightarrow 1-\ln(x) = 0 \wedge x^2 \neq 0 \Leftrightarrow x = e \wedge x \neq 0$

x	0		e	$+\infty$
f''	SS	+	0	−
f	SS	$\cup$	p.i.	$\cap$

- concavidade virada para cima em $]0, e[$
- concavidade virada para baixo em $]e, +\infty[$
- ponto de inflexão em $x = e$ ou seja $(e, f(e)) = (e, 1)$

Figura 38 – Resolução de Diana (Tarefa 3, questão 1.a)

Para reforçar a ideia que os alunos mostraram ter reconhecido o significado desta relação entre a segunda derivada e a função original, apresento na figura 39, uma resolução que foi utilizada na secção anterior, uma vez que a considero necessária aqui, para um objetivo distinto. Esta resolução, única, apesar de não estar totalmente correta, dado que a aluna cometeu erros de cálculo ao anular a segunda derivada (a segunda derivada não tem zeros, porque $x = 2$ é zero do denominador), mostra que a aluna percebeu que apesar de ser zero da segunda derivada, não seria ponto de inflexão da função original porque tinha calculado anteriormente as assíntotas verticais e concluído que $x = 2$ é assíntota vertical do gráfico. Portanto, esta resolução mostra que a aluna estava a pensar no significado e não seguiu apenas um procedimento.



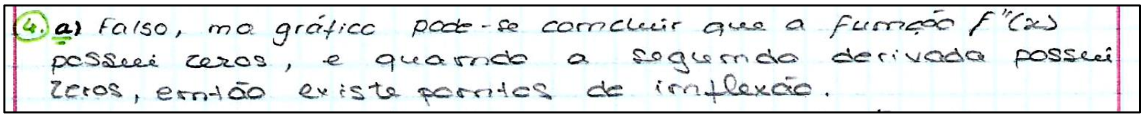
$f''(x)=0 \Leftrightarrow \frac{-4x+8}{(2-x)^4}=0 \Leftrightarrow 4x=8 \Leftrightarrow x=2$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
f''	+	0	−
f	∪	N.D	∩

↳ é N.D e não p.i porque $x=2$ é assíntota de f.

Figura 39 – Resolução de Bruna (Tarefa 5, questão 1.a)

Sobre a relação que se pode estabelecer entre os pontos de inflexão e os zeros da derivada, apresento a resolução da figura 40 que diz respeito à questão 4 da tarefa 3, mas que não é partilhada por muitos alunos. Nesta questão era fornecido um gráfico da segunda derivada de uma função e perguntava-se o valor lógico de algumas afirmações sobre a função original, estabelecendo relações entre as duas. Apesar da resposta "falsa" da aluna estar correta no caso em estudo, fica incompleta ao afirmar que os zeros da segunda derivada são pontos de inflexão da função original. Esta afirmação não é verdade para todas as funções, sendo necessário indicar que, pela observação do gráfico, a segunda derivada mudava de sinais quando se anulava, ou seja, passava de positiva para negativa e posteriormente para positiva outra vez, pelo que aqueles dois pontos onde se anulava correspondem realmente a pontos de inflexão da função original. Deste modo, não é possível saber se estes alunos compreenderam que a condição do anulamento da segunda derivada é necessária, mas não suficiente para assegurar a existência de pontos de inflexão.



4. a) Falso, no gráfico pode-se concluir que a função $f''(x)$ possui zeros, e quando a segunda derivada possui zeros, então existe pontos de inflexão.

Figura 40 – Resolução de Francisca (Tarefa 3, questão 4)

Na tarefa 5, questão 1.a, era pedido aos alunos para estudarem uma função, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos e para a representarem graficamente. Como podemos observar, na figura 41, o aluno cometeu erros a determinar a segunda derivada, o que o levou a encontrar um valor incorreto para o seu zero, revelando assim uma dificuldade algébrica. Além disso, o aluno esqueceu-se de considerar que ao resolver a equação de anulamento da segunda derivada, o denominador teria que ser diferente de zero. Posteriormente, o aluno constrói o quadro de sinais, indicando que em $x = \frac{8}{6}$ a função tem ponto de inflexão, mas quando constrói o gráfico esse ponto não está representado, uma vez que o gráfico que o aluno nos apresenta não possui pontos de inflexão. Deste modo, o aluno não relaciona as representações algébrica e gráfica. Saliento que a linha vertical tracejada é a assíntota vertical $x = 2$, que o aluno tinha calculado anteriormente. Portanto, o aluno apresenta-nos um quadro e um gráfico que não estão de acordo, o que evidencia que o aluno não compreendeu a relação da função original com a sua segunda derivada, no que se refere a representações analíticas e gráficas.

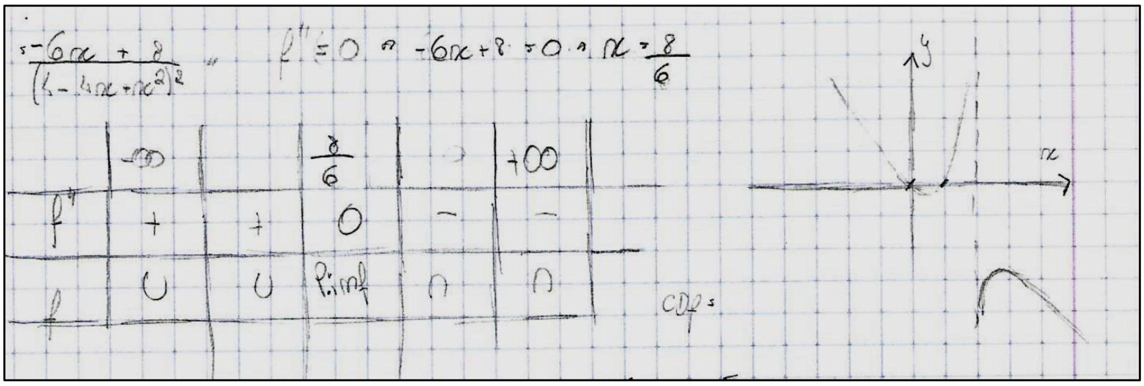


Figura 41 – Resolução de Sérgio (Tarefa 5, questão 1.a)

Por último apresento uma resolução exemplificativa do trabalho de alguns alunos, na figura 42, da tarefa 5, questão 1.b. Como podemos observar, a aluna começou por calcular, corretamente, o domínio da função que ia estudar. De seguida, determinou o zero da segunda derivada, obtendo $x = 0$, mas como o domínio da função era $\mathbb{R}\backslash[-1,1]$, a aluna conclui, bem, que a função não tem significado nesse ponto. No entanto, quando preenche o quadro, a aluna representa numa coluna o valor $x = 0$ indicando que a função não está aí definida, mas esquece-se de indicar que o mesmo acontece no intervalo $[-1,1]$. Ou seja, a aluna indicou o domínio da função, mas depois não o utilizou para a construção do quadro, levando-a a retirar uma conclusão errada sobre o sentido das concavidades da função. A aluna evidencia não ter reconhecido a relação da função original com a segunda derivada, aquando da utilização de representações numérica e analítica.

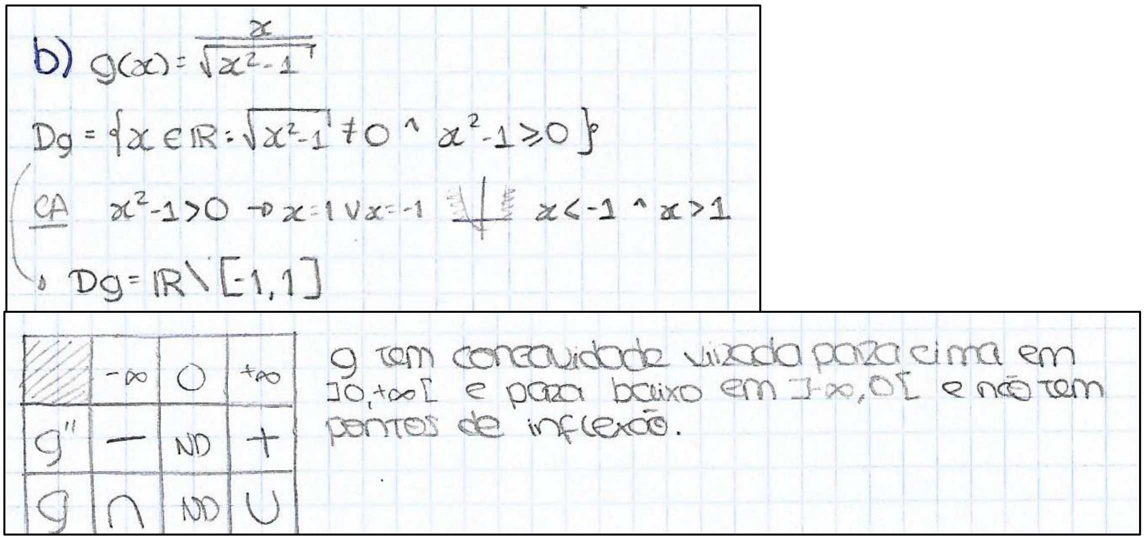


Figura 42 – Resolução de Diana (Tarefa 5, questão 1.b)

Em suma, os alunos evidenciam compreender a relação entre a segunda derivada e a sua função original. Os alunos mostram ser capazes de relacioná-las a nível gráfico, mais especificamente quando fazem a correspondência entre a representação gráfica de ambas e a justificam através da relação que existe entre o sentido das concavidades e os pontos de inflexão da função original e o sinal e zeros da segunda derivada, respetivamente. Também mostram saber relacioná-las a nível algébrico, determinando a expressão da segunda derivada a partir da expressão da função original e estudando o seu sinal através da sua expressão analítica, tendo em atenção o seu domínio; e a nível numérico, recorrendo ao quadro de sinal e ao cálculo dos sinais e zeros da segunda derivada, para retirarem conclusões sobre o sentido das concavidades e pontos de inflexão da função original.

Para além dos alunos conseguirem relacioná-las a esses níveis, foram capazes de compreender que um ponto onde a segunda derivada se anula não é obrigatoriamente um ponto de inflexão da função original. Mais especificamente, os alunos conseguiram retirar essa conclusão quando o zero da segunda derivada não pertence ao domínio da função original ou quando é um ponto onde existe assíntota vertical da função.

Relativamente a dificuldades no estabelecimento desta relação entre função original e a sua segunda derivada, alguns alunos revelaram dificuldades concetuais, mais especificamente, no conceito de função e no de segunda derivada da função, tendo confundido os elementos pertencentes e o que se estudava em cada uma, bem como nos conceitos de ponto de inflexão e extremos de uma função. Estas dificuldades podem estar associadas ao facto da segunda derivada ser um tópico novo e os alunos estarem habituados a relacionar a derivada de uma função com os seus extremos, uma vez que estas dificuldades foram mais recorrentes nas primeiras aulas. As dificuldades concetuais que enumerei foram as mais difíceis de ultrapassar, porque os alunos são capazes de resolver algebricamente o que lhes é pedido, mas depois não compreendem os procedimentos envolvidos nessa resolução. Isto é, os alunos fazem os diversos passos da resolução, mas depois não cruzam a informação que obtém, acabando por apresentar uma resolução incoerente, nomeadamente apresentam gráficos sem pontos de inflexão e indicam que existem, apresentam domínios e não os têm em conta aquando da construção dos quadros de sinal e indicam, no quadro de sinal, que a função não tem significado para o zero da segunda derivada, mas concluem que esse ponto é um ponto de inflexão.

5.3. Estratégias e conhecimentos mobilizados na resolução de problemas e principais dificuldades

Nesta secção vou analisar as estratégias e os conhecimentos que os alunos mobilizam na resolução de problemas que envolvem a segunda derivada e que dificuldades manifestam.

Na questão 2, da tarefa 4 era fornecida a expressão algébrica de uma função, dependente do tempo, da concentração de um medicamento no sangue e na questão 2.3 era solicitado que os alunos estudassem essa função quanto ao sentido das concavidades e existência de pontos de inflexão. Assim sendo, esperava que os alunos determinassem a segunda derivada e os seus zeros e retirassem conclusões sobre o sentido das concavidades e pontos de inflexão da função original, relacionando com o sinal da segunda derivada. Esperava também que uma das estratégias que surgisse envolve-se o quadro de sinal, por ter sido uma estratégia muito trabalhada em sala de aula. Como podemos observar na figura 43, uma resolução correta apresentada por parte significativa dos alunos, o aluno recorre à segunda derivada para estudar o sentido das concavidades da função original, com o objetivo de dar resposta ao problema apresentado. Apesar de não estar presente na figura, o aluno começou por determinar a segunda derivada, depois igualou-a a zero para determinar o ponto onde esta se anula, construiu o quadro de sinal e, por último, deu resposta ao problema, apresentando os intervalos do domínio da função onde esta possui a concavidade voltada para cima e onde possui a concavidade voltada para baixo, bem como o ponto de inflexão, tal como previsto.

Escolhi esta resolução, pois tive oportunidade de questionar o aluno, durante a aula sobre o que obteve, tendo essa conversa registada em notas de campo e surpreendeu-me, pela positiva, a resposta fornecida. Questionei-o se fazia sentido uma função que representa a concentração de um medicamento no sangue ter a concavidade voltada para baixo inicialmente e depois concavidade voltada para cima. O aluno respondeu que sim, mas eu insisti e perguntei se o sentido das concavidades poderia ser ao contrário, ou seja, primeiramente para cima e posteriormente para baixo. O aluno disse que não poderia ser, porque se a função representa a concentração de um medicamento no sangue, a função vai ser crescente porque a concentração aumenta no início quando tomamos o medicamente e depois vai ser decrescente até ao zero, porque o efeito do medicamento vai diminuindo com o tempo, até deixar de surtir efeito. Portanto, uma função nestas condições tem obrigatoriamente de ter concavidade voltada para baixo primeiro e depois concavidade voltada para cima. A resposta que o aluno me deu deixou-me extremamente satisfeita, porque evidencia que reconheceu o significado da segunda derivada no contexto do problema e não se limitou a calcular derivadas, evidenciando conhecimentos sobre a resolução de problemas, nomeadamente, identificou os dados, registou os cálculos e deu resposta ao problema. Além disso, mobilizou os seus conhecimentos recentes sobre a segunda derivada e pontos de inflexão.

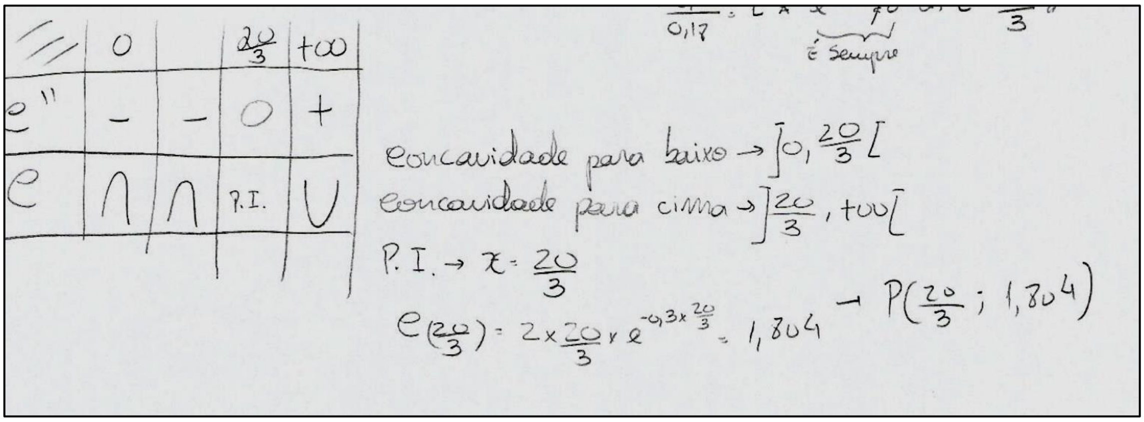
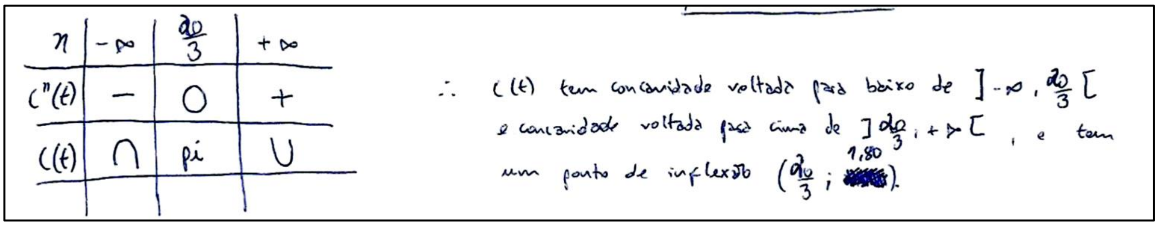


Figura 43 – Resolução de Marcelo (Tarefa 4, questão 2.3)

Apesar da maioria dos alunos ter apresentado resoluções como a anterior, alguns desconsideraram o enunciado do problema, o que levou a conclusões incorretas. Na mesma questão, identifiquei algumas resoluções incorretas que não esperava que os alunos fizessem. Como podemos observar na figura 44, resolução exemplificativa de uma minoria dos alunos, a aluna indicou que o domínio da função era ℝ, o que está incorreto. Para além do domínio ser fornecido no enunciado $(t \geq 0)$, a aluna não mostra sentido crítico reconhecendo que como a função é dependente do tempo, o seu domínio nunca poderia ter valores negativos. Deste modo, a sua conclusão que a função tem a concavidade voltada para baixo de $]-\infty, \frac{20}{3}[$ não está correta. Apesar de a aluna ter escolhido a mesma estratégia a que o aluno da figura anterior recorreu, ela concluiu incorretamente por ter descartado o enunciado do problema. Nesta resolução também é possível identificar, na primeira fase de resolução de problemas, que a aluna não identifica a questão a responder e na última fase, na análise retrospetiva, não analisa a consistência da solução.



n	$-\infty$	$\frac{20}{3}$	$+\infty$
$c''(t)$	$-$	0	$+$
$c(t)$	$\cap$	pi	$\cup$

$\therefore$ $c(t)$ tem concavidade voltada para baixo de $]-\infty, \frac{20}{3}[$ e concavidade voltada para cima de $]\frac{20}{3}, +\infty[$, e tem um ponto de inflexão $(\frac{20}{3} ; 1{,}80)$.

Figura 44 – Resolução de Bruna (Tarefa 4, questão 2.3)

Na mesma questão, surgiu uma outra resolução, única, apresentada na figura 45 e que não esperava que surgisse. Não é possível observar na figura, mas anteriormente à construção do quadro, o aluno determinou incorretamente a segunda derivada, cometeu erros a calcular os zeros e concluiu incorretamente que zero anulava a segunda derivada. Apesar desse erro, o aluno assinalou corretamente o domínio da função, tendo construído o quadro apenas para valores positivos ou iguais a zero da variável t. Porém, ele indicou que zero era ponto de inflexão, demonstrando falta de sentido crítico, uma vez que, pela análise do quadro podemos observar que para valores positivos, a função tem concavidade voltada para cima, mas para valores negativos, não existe função, logo em zero não existe troca de concavidades. O aluno foi capaz de resolver algebricamente o que lhe era pedido, mas depois não compreendeu os procedimentos envolvidos nessa resolução. Se o aluno interpretasse o resultado no contexto do problema poderia aperceber-se que a conclusão estava incorreta, ou seja, não usou a heurística de identificar a questão a responder, na fase de compreender o problema e de analisar a consistência da solução, na fase de análise retrospetiva.

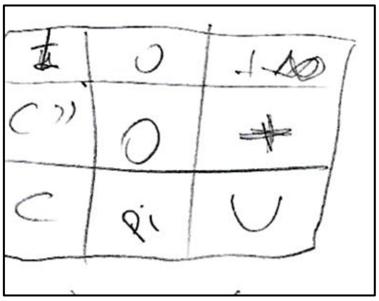


Figura 45 – Resolução de Tiago (Tarefa 4, questão 2.3)

Na mesma tarefa, mas na questão 3, era dada uma função que indicava a altura da água num reservatório, dependente do tempo e na questão 3.3 era pedido aos alunos que a estudassem quanto ao sentido das concavidades e existência de pontos de inflexão. Como na questão 3.1, os alunos já tinham estudado a função quanto à monotonia, sabiam que esta era estritamente decrescente e depois estritamente crescente. Assim sendo, pretendia que os alunos conseguissem concluir que a função tem sempre concavidade voltada para cima, a partir desse resultado, sem lhes dar indicação para relacionarem as questões. Isto é, pretendia que os alunos desenvolvessem conhecimento novo, partindo do prévio. Infelizmente essa estratégia não surgiu no momento de trabalho autónomo, pelo que foi um aspeto que salientei no momento de discussão em grande grupo. Penso que esta estratégia não tenha surgido, porque nunca tinha sido trabalhada com os alunos. Depois de termos discutido essa estratégia, os alunos concluíram que tinha sido mais fácil relacionar as duas questões a fim de resolver o problema, isto é, relacionar a primeira e a segunda derivada, na resolução de problemas.

Apesar de não ter surgido a estratégia que pretendia, os alunos evidenciaram outros conhecimentos necessários na resolução de problemas. Como podemos observar na figura 46, resolução apresentada por outros alunos à questão anterior, eles calcularam a segunda derivada, os seus zeros e concluíram que não tem zeros, ou seja, é sempre positiva ou sempre negativa. O aluno, para justificar a escolha do sinal da função segunda derivada, decidiu construir um quadro de sinal. A construção do quadro de sinal era uma das estratégias que tinha planeado, uma vez que os alunos estão habituados a recorrer ao quadro de sinal para estudarem o sinal da função segunda derivada e retirarem conclusões sobre as concavidades da função original. A partir dele, o aluno concluiu corretamente que a segunda derivada é sempre positiva, logo a função original tem sempre concavidade voltada para cima no seu domínio, mobilizando os conhecimentos recentes necessários para dar resposta ao problema, nomeadamente conhecimentos sobre a segunda derivada, pontos de inflexão e quadro de sinal. Para além destes conhecimentos, o aluno utilizou diversas heurísticas tais como identificar a questão a responder, organizar a informação, partir do que sabia, registar os cálculos e dar resposta ao problema.

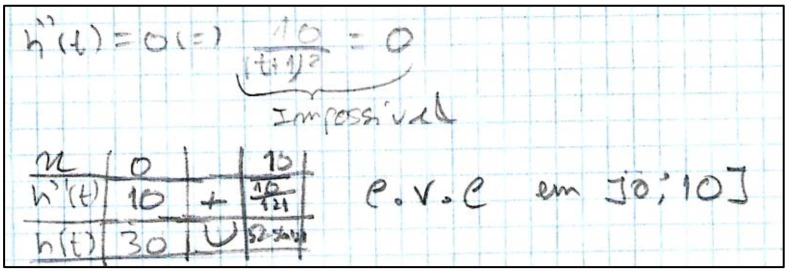


Figura 46 – Resolução de Artur (Tarefa 4, questão 3.3)

De seguida apresento uma resolução semelhante à da figura 46, ainda sobre a mesma questão. Como podemos observar na figura 47, resolução única, o aluno depois de ter determinado a segunda derivada atribuiu um valor a x, que pertencesse ao domínio da função, isto é, ao intervalo $[0{,}10]$. Assim, o aluno escolheu o número 4 e concluiu que a segunda derivada era positiva para esse valor, o que está correto. Porém, sem mais justificações, o aluno construiu o quadro de sinal e indicou que a segunda derivada tinha sinal positivo em todo o domínio, e, consequentemente, a função original tinha sempre concavidade voltada para cima. Esta resolução está incompleta, porque, ao contrário do que o aluno na resolução anterior fez, justificando o sinal da segunda derivada para todos os valores do domínio, este aluno limitou-se a justificar o sinal da segunda derivada para um valor específico do domínio, o que não é suficiente. Esta estratégia não estava prevista, uma vez que revela que o aluno não percebe o significado de sinal da derivada num intervalo, tendo assumido que o comportamento de uma função num ponto é igual para um conjunto de valores.

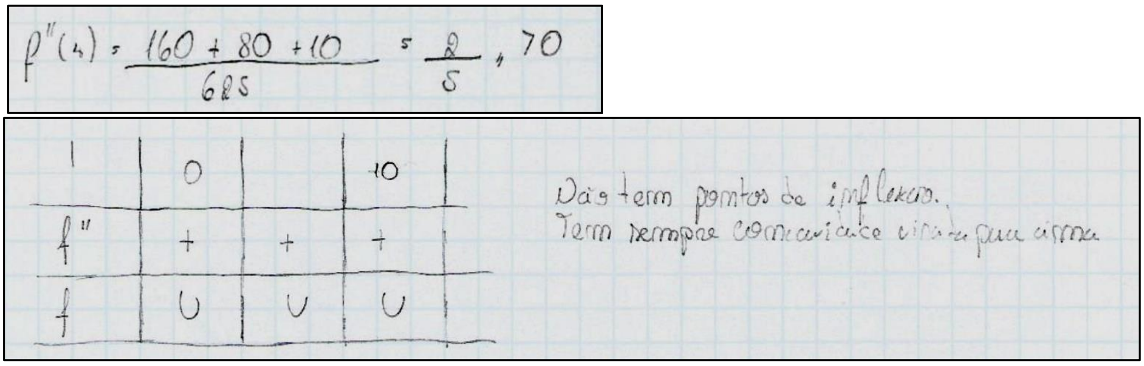


Figura 47 – Resolução de Sérgio (Tarefa 4, questão 3.3)

Na mesma questão, uma parte significativa dos alunos optou por não construir um quadro de sinal, mas justificar o sentido da concavidade a partir do sinal da função segunda derivada. Esta estratégia era uma das que esperava que surgisse, apesar de ter sido menos trabalhada em sala de aula com os alunos. Ela permite-me perceber que os alunos compreenderam o conceito de segunda derivada e o estudo do seu sinal. Como podemos observar, na figura 48, o aluno começou por determinar a segunda derivada e depois estudou os seus zeros e o seu sinal. Indicou que o denominador é positivo e, como o numerador também é positivo, concluiu que a segunda derivada é sempre positiva, logo a função original tem concavidade voltada para cima. Para além disso, o aluno ainda indicou que o denominador é diferente de 10, logo a segunda derivada não se anula, pelo facto da função original não ter pontos de inflexão. Em suma, esta resolução mostra que o aluno compreendeu o que estava a fazer e não se limitou a resolver o problema algebricamente, tendo recorrido também à linguagem natural para justificar o seu raciocínio. Deste modo, o aluno demonstra possuir conhecimentos recentes sobre a segunda derivada, pontos de inflexão e sentidos de concavidade da função original.

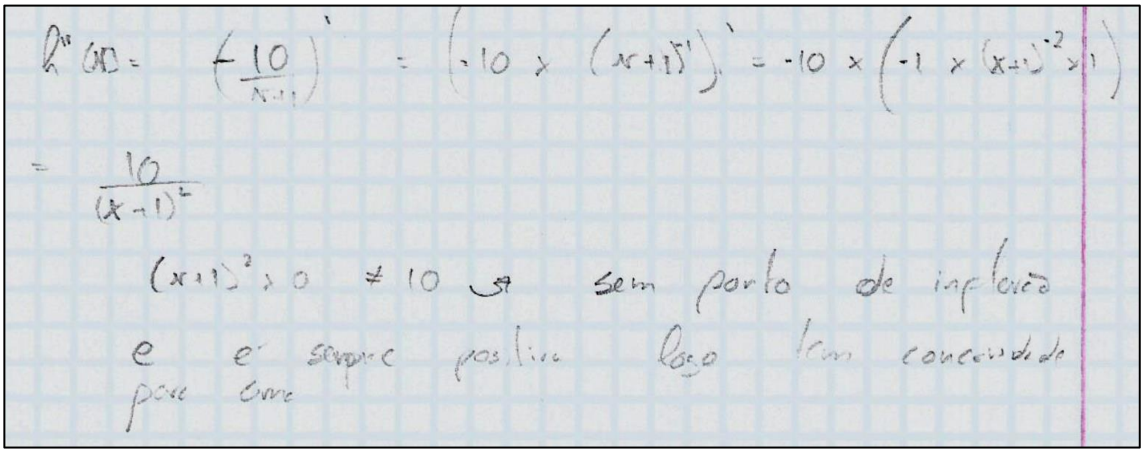


Figura 48 – Resolução de António (Tarefa 4, questão 3.3)

Por último, ainda na questão 3.3 da tarefa 4, alguns alunos optaram por uma resolução idêntica à da figura 48, anterior, mas não justificaram o sinal da função. Tal como esperava que a estratégia anterior surgisse, também pensava encontrar esta dificuldade. Como podemos observar na figura 49, uma resolução partilhada por alguns alunos, o aluno depois de ter determinado a segunda derivada foi encontrar os zeros e conclui, acertadamente, que não existem, visto que chegou a uma proposição impossível $10 = 0$. Deste modo, concluiu também corretamente que a função original não tem pontos de inflexão. Porém, o aluno afirma de imediato que a função tem concavidade voltada para cima no domínio, sem justificar, ficando a resolução incompleta. Pelo trabalho desenvolvido com os alunos na sala de aula percebi que, por vezes, eles não justificam todo o seu raciocínio e, por esse motivo, esperava encontrar algumas resoluções incompletas como esta. Provavelmente, o aluno deve ter recorrido à calculadora para concluir o sentido da concavidade, o que não era o objetivo do problema, pelo que este aluno não mostrou ter reconhecido a importância de utilizar a segunda derivada para resolver um problema.

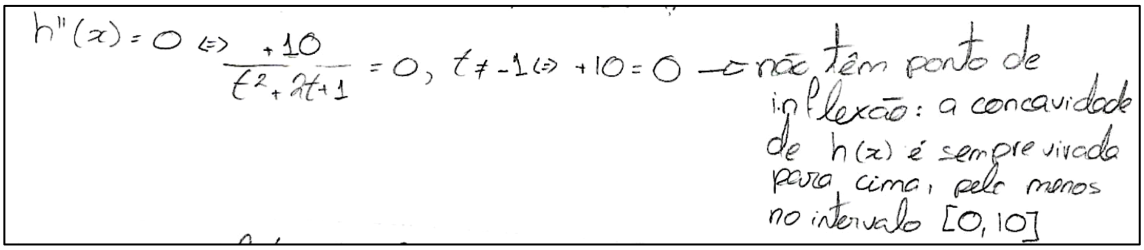

$h''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{+10}{t^2+2t+1} = 0,\ t \neq -1 \Leftrightarrow +10 = 0 \rightarrow$ não têm ponto de inflexão: a concavidade de $h(x)$ é sempre virada para cima, pelo menos no intervalo $[0, 10]$

Figura 49 – Resolução de Lourenço (Tarefa 4, questão 3.3)

Em suma, pela análise das resoluções acima posso concluir que os alunos utilizam estratégias e conhecimentos interessantes para resolver problemas, envolvendo a segunda derivada.

Os alunos evidenciaram ter percebido como se podem relacionar a primeira e a segunda derivada, a fim de conseguir dar resposta a um problema, sendo esta uma das estratégias utilizadas. Mais especificamente, durante a discussão em sala de aula, os alunos retiraram conclusões como: quando a primeira derivada é decrescente, a concavidade da função é voltada para baixo e, consequentemente, a segunda derivada é negativa; quando a primeira derivada é crescente, a concavidade da função é voltada para cima e, consequentemente, a segunda derivada é positiva. Após esta discussão, os alunos também chegaram à conclusão que relacionando a primeira e a segunda derivada pode facilitar a resolução de um problema, como foi o caso da questão 3.3 da tarefa 4.

Uma outra estratégia que surgiu e me surpreendeu pela positiva, foi a utilização da linguagem natural para explicar o raciocínio apresentado, como é o caso da figura 48.

A estratégia mais frequentemente utilizada pelos alunos é o cálculo da segunda derivada e, recorrendo ao quadro de sinal, o estudo do seu sinal, para posteriormente, retirarem conclusões sobre o sentido das concavidades e pontos de inflexão da função original, a fim de dar resposta ao problema apresentado.

Para além destas estratégias, a maioria dos alunos mostrou ter conhecimentos sobre a segunda e primeira derivadas, pontos de inflexão, quadro de sinal e concavidades da função original e, sempre que foi possível, mobilizaram o conhecimento prévio para desenvolver conhecimento novo. Para além destes conhecimentos, os alunos utilizaram diversas heurísticas para resolver problemas, nomeadamente, identificaram os dados e a questão, organizaram a informação, partiram do que já sabiam (conhecimento prévio sobre a primeira derivada), registaram os cálculos e analisaram a consistência da solução.

Relativamente às dificuldades, existiram alguns alunos que desconsideraram o contexto do problema e, consequentemente, apresentaram resoluções onde consideraram tempos negativos e onde não consideraram o domínio correto da função, acrescentando valores ao domínio. Este descarte do enunciado pode ter origem numa dificuldade concetual, uma vez que os alunos foram capazes de resolver algebricamente o que lhe era pedido, mas depois não compreenderam os procedimentos envolvidos nessa resolução e não interpretaram os resultados à luz do problema. Um exemplo desta situação é a resolução da figura 45, onde o aluno depois de ter obtido o quadro não se questionou sobre o comportamento da função que representava a concentração de um medicamento.

Por último, uma dificuldade presente em poucas resoluções foi a falta de justificação, ou seja, alguns alunos apresentaram resoluções incompletas, não sentido necessidade de justificar o seu raciocínio.

Capítulo 6

Conclusões e reflexão final

Neste capítulo faço uma síntese do estudo, onde apresento uma breve introdução, o objetivo e as questões de investigação, uma breve referência ao capítulo teórico e à metodologia utilizada. Depois exponho as conclusões do estudo, respondendo às questões que formulei, articulando com a fundamentação teórica. E por último, apresento uma reflexão final sobre a minha intervenção, as minhas aprendizagens e dos alunos e algumas implicações para possíveis trabalhos futuros.

6.1. Síntese do estudo

O estudo que apresento tem como base a intervenção letiva que realizei numa turma do 12.º ano da Escola Secundária da Ramada. Os alunos desta turma são muito participativos, interessados e têm bom comportamento. O trabalho desenvolvido em sala de aula foi bastante produtivo, porque os alunos eram autónomos e envolvidos durante o trabalho autónomo e ordeiros na discussão das questões em grande grupo. A intervenção letiva teve lugar no 2º período do ano letivo de 2015/16, ao longo de cinco aulas de 90 minutos, na unidade curricular "Cálculo Diferencial" do tema "Introdução ao Cálculo Diferencial II", do programa de Matemática A em vigor (ME, 2002). Como a Escola pretende começar a orientar o ensino para o novo programa e metas curriculares de Matemática A do ensino secundário (MEC, 2014), a minha intervenção integrou também o tema 'Funções Reais de Variável Real', nas unidades curriculares "Derivada de segunda ordem, extremos, sentido das concavidades e pontos de inflexão" e "Aplicação do cálculo diferencial à resolução de problemas".

Neste estudo pretendi analisar qual a compreensão que os alunos do 12.º ano evidenciam da noção de segunda derivada de uma função e as dificuldades que manifestam na sua aplicação na resolução de tarefas que a envolvem. Tendo em conta estes objetivos e para me orientar no estudo, formulei as seguintes questões:

1. Como os alunos interpretam a noção de 2ª derivada de uma função e que dificuldades manifestam quando a determinam, em diferentes representações?

2. Como os alunos relacionam a 2ª derivada de uma função com a função original? Que dificuldades revelam?
3. Que estratégias e conhecimentos os alunos mobilizam, na resolução de problemas de otimização que envolvem a 2ª derivada de uma função? Quais as principais dificuldades que manifestam?

Para fundamentar o trabalho desenvolvido e a análise dos dados recolhidos foquei-me nas orientações curriculares sobre o tema abordado e na literatura de referência que aborda o conceito de derivada de uma função, mais especificamente, na definição e no tratamento curricular do conceito, nas representações de funções, nas dificuldades dos alunos na compreensão do conceito de derivada e nas representações e nos problemas no contexto das derivadas.

Relativamente à recolha de dados que realizei durante a lecionação da subunidade didática, esta inclui a observação das aulas, com registo vídeo e notas de campo e a recolha documental das produções escritas dos alunos na realização de tarefas.

6.2. Conclusões do estudo

6.2.1. Noção de 2ª derivada de uma função e dificuldades na sua determinação, em diferentes representações

Segundo Cabral (2015), os alunos desenvolvem uma compreensão sobretudo instrumental da derivada de uma função e tendem a desenvolver apenas um significado para este conceito matemático. Os alunos deste estudo revelaram aprendizagens significativas em relação à segunda derivada e conseguiram interpretar a segunda derivada de diversas formas e reconhecê-la em diferentes representações. Uma das interpretações identificadas diz respeito à concavidade da função original, em que os alunos associaram o sinal da segunda derivada ao sentido da concavidade da função. Os alunos também interpretaram os pontos onde a segunda derivada se anula como os pontos de inflexão da função original, mas revelaram compreender que o anulamento da segunda derivada não obriga a que esse ponto seja de inflexão na função original, caso não esteja definido.

Estes dois significados apresentados anteriormente eram os esperados, porque foram esses que tinha como objetivo. Defini esses dois baseando-me nos programas, na minha experiência como aluna e em alguma literatura sobre estudos envolvendo a segunda derivada, que não são abundantes.

Assim sendo, considero que os alunos foram capazes de desenvolver compreensão relacional da noção de derivada (Skemp, 1978), uma vez que perceberam o como, e ao mesmo tempo, o porquê, permitindo não só perceber o procedimento, mas também a sua justificação. Este resultado pouco comum noutros estudos pode ter origem nos conhecimentos prévios que os alunos possuíam sobre a primeira derivada e que me pareceram bem consolidados.

Segundo Dreyfus (1990, citado em Domingos, 2003), os alunos do ensino secundário aprendem procedimentos de cálculo, isto é, calculam limites e derivadas a um nível maioritariamente algorítmico, possuindo maiores dificuldades na visualização, por esta ser rara. Para além disto, quando o professor tenta estabelecer a ligação cognitiva entre as representações gráfica e algébrica, os alunos têm grandes dificuldades. Os alunos deste estudo foram capazes de interpretar a segunda derivada em diferentes representações e de as articular, não exibindo as dificuldades referidas por este autor. No caso da representação algébrica, os alunos foram capazes de determinar a expressão analítica da segunda derivada da função, aplicando as regras de derivação. Na representação numérica, os alunos conseguiram construir os quadros de sinal e preenche-los corretamente de forma a retirarem conclusões sobre os sentidos da concavidade da função original e os seus pontos de inflexão. Por último, na representação gráfica, tal como Dreyfus afirmava, apesar de os alunos conseguirem interpretar e traduzir a informação desta para linguagem corrente, foi a representação onde possuíram maiores dificuldades.

Relativamente aos erros e dificuldades que os alunos revelam no conceito de derivada, Gil (2014) identificou que são diversos e incluem a correta interpretação/concetualização geométrica do limite, a associação do conceito a regras de derivação, a interpretação gráfica da função derivada, a utilização correta da linguagem para descrever o gráfico da função derivada, o foco na aprendizagem dos procedimentos e não na compreensão do significado do conceito e na forma como estes podem ser aplicados. Os alunos deste estudo apenas demonstraram algumas destas dificuldades, que se podem classificar, segundo Kendal & Stacey (2003), em algébricas, numéricas e gráficas, no que respeita às representações e do tipo concetual. O facto de os alunos deste estudo terem apresentado menos dificuldades que os do estudo anterior pode estar relacionado com a diferença de nível escolar (12.º ano e 11.º ano, respetivamente) e, uma vez que, os alunos deste estudo tiveram tempo para aprofundar os conhecimentos sobre a primeira derivada, facilitando a aprendizagem da segunda derivada.

As dificuldades algébricas estão relacionadas com a aplicação das regras de derivação, nomeadamente de operação de funções. No caso do produto, os alunos derivaram isoladamente cada parcela e multiplicaram-nas posteriormente e no caso do quociente, frequentemente não incluíram o denominador na expressão derivada. Relativamente à derivação de funções exponenciais e potências, a maior dificuldade apresentada foi ao nível concetual, uma vez que os alunos confundiram estas duas funções e, por isso, aplicaram a regra de derivação incorreta. Esta dificuldade poderá ter origem no pouco destaque que é atribuído à derivada da função exponencial aquando do início da sua lecionação. Por último, na derivação de raízes, os alunos realizavam tratamentos na sua expressão, transformando-a numa função potência, mas esqueciam-se de a derivar depois, o que poderá ter origem na transformação inicial que têm de realizar.

As dificuldades numéricas apresentadas pelos alunos prendem-se com a construção do quadro de sinal da segunda derivada, mais especificamente com o rigor e o formato, a determinação do domínio da função a estudar, o reconhecimento dos pontos sem significado da função e a conceção errada de que um ponto onde a segunda derivada se anula é necessariamente um ponto de inflexão.

Relativamente às dificuldades gráficas, os autores Almeida e Viseu (2002) concluíram que os alunos possuem dificuldades na interpretação da representação gráfica, uma vez que é menos abordada. Esta observação confirma-se, neste estudo, sendo que as dificuldades gráficas encontradas estão relacionadas com a interpretação dos gráficos e com a tradução entre representações, isto é, tradução da informação presente nos gráficos para linguagem corrente.

6.2.2. Relação da segunda derivada com a função original e dificuldades nessa relação

Os alunos deste estudo evidenciaram compreender a relação entre a segunda derivada e a sua função original. Eles mostraram ser capazes de relacioná-las a nível gráfico, mais especificamente quando fazem a correspondência entre a representação gráfica de ambas as funções e a justificam através da relação que existe entre o sentido das concavidades e os pontos de inflexão da função original e o sinal e zeros da segunda derivada, respetivamente. Também mostraram saber relacioná-las a nível algébrico, determinando a expressão da segunda derivada a partir da expressão da função original e estudando o seu sinal através da sua expressão analítica, tendo em atenção o seu domínio; e a nível numérico, recorrendo ao quadro de sinal e ao cálculo dos sinais e zeros da segunda derivada, para retirarem conclusões sobre o sentido das concavidades e pontos de inflexão da função original.

Segundo Vasques (2015) é pouco frequente pedir-se aos alunos que façam interpretações geométricas das derivadas de uma determinada função, ou seja, o conceito imagem do conceito de derivada estabelecido pelos alunos é limitado, uma vez que não conseguem estabelecer a relação da derivada num ponto, para a função derivada representada graficamente, encarando-a apenas como uma expressão algébrica. Todavia, os alunos foram capazes de compreender que um ponto onde a segunda derivada se anula não é obrigatoriamente um ponto de inflexão da função original. Mais especificamente, os alunos conseguiram retirar essa conclusão quando o zero da segunda derivada não pertence ao domínio da função original ou quando é um ponto onde existe assíntota vertical da função. Deste modo, os alunos deste estudo parecem possuir um conceito de derivada que lhes permite relacionar a segunda derivada com a função original, a um nível mais relacional e não só instrumental. Isto também se deve ao facto de os alunos possuírem previamente conhecimentos bem consolidados sobre a primeira derivada e não possuírem grandes dificuldades na sua relação com a função original. Logo, aquando do relacionamento da segunda derivada com a função original, não surgiram muitas dificuldades.

Relativamente a dificuldades no estabelecimento desta relação entre a função original e a sua segunda derivada, pesquisas de Orhun (2012) mostram que, para os alunos, muitas vezes o conceito de derivada está associado às regras de derivação e que não conseguem interpretar o gráfico da função derivada. Isto é, eles sentem dificuldade em estabelecer conexões entre o gráfico da função derivada com o da função original, acabando por interpretar o gráfico da função derivada como um gráfico de função real de variável real. Analogamente, alguns alunos deste estudo cometeram erros concetuais, mais especificamente, no conceito de função e no de segunda derivada da função, tendo confundido os elementos pertencentes e o que se estudava em cada uma. Ou seja, alguns alunos confundiram extremos com pontos de inflexão, afirmando que quando a segunda derivada se anula, esses pontos correspondem a extremos da função original. Também confundiram as propriedades pertencentes a cada função, afirmando que quando a função é positiva, então a concavidade da segunda derivada é voltada para cima e quando a função é negativa, a concavidade da segunda derivada é voltada para baixo.

Para além das dificuldades que apontei no parágrafo anterior, alguns alunos apresentaram dificuldades nos conceitos de ponto de inflexão e extremos de uma função. Esta dificuldade pode estar associada ao facto de a segunda derivada ser um tópico novo e os alunos estarem habituados a relacionar a derivada de uma função com os seus extremos, uma vez que estas dificuldades foram mais recorrentes nas primeiras aulas.

Por último, as dificuldades mais difíceis de ultrapassar foram as dificuldades concetuais, tal como as pesquisas de Orton (1983) confirmam. O autor concluiu que a maioria dos alunos, com idades compreendidas entre os 16 e os 22 anos, não sente grande dificuldade na aplicação das regras de derivação, mas aquando da interpretação/conceptualização geométrica do limite, evidenciam dificuldades e, por esse motivo, o conceito de derivada não pode ser compreendido concetualmente, tendo de existir uma abordagem complementar para uma melhor aprendizagem. Analogamente, no meu estudo verifiquei que alguns alunos são capazes de resolver algebricamente o que lhes é pedido, mas depois não compreendem os procedimentos envolvidos nessa resolução, isto é, eles fazem os diversos passos da resolução, mas depois não cruzam a informação que obtém. Deste modo, os alunos apresentam uma resolução incoerente, nomeadamente apresentam gráficos sem pontos de inflexão e indicam que existem, apresentam domínios e não os têm em conta aquando da construção dos quadros de sinal e indicam, no quadro de sinal, que a função não tem significado para o zero da segunda derivada, mas concluem que esse ponto é um ponto de inflexão.

6.2.3. Estratégias e conhecimentos mobilizados na resolução de problemas e principais dificuldades

Os alunos evidenciaram ter percebido como se pode relacionar a primeira e a segunda derivada, a fim de conseguir dar resposta a um problema. Por exemplo, durante uma discussão em sala de aula os alunos retiraram conclusões como: quando a primeira derivada é decrescente, a concavidade da função é voltada para baixo e, consequentemente, a segunda derivada é negativa; quando a primeira derivada é crescente, a concavidade da função é voltada para cima e, consequentemente, a segunda derivada é positiva. Após esta discussão, os alunos também chegaram à conclusão que relacionando a primeira e a segunda derivada facilita a resolução de um problema. Assim sendo, uma estratégia para resolver o problema foi usar o conhecimento que possuíam sobre a primeira e segunda derivada, uma vez que através dessa relação conseguimos retirar informações sobre a função original. Uma outra estratégia que surgiu e me surpreendeu pela positiva, uma vez que foi a menos utilizada em sala de aula e é a que a literatura faz menos referência, foi a utilização da linguagem natural para explicar o raciocínio apresentado.

A estratégia mais frequentemente utilizada pelos alunos na resolução de problemas foi o cálculo da segunda derivada e, recorrendo ao quadro de sinal, o estudo do seu sinal, para posteriormente, retirarem conclusões sobre o sentido das concavidades e pontos de inflexão da função original, de modo a dar resposta ao problema apresentado.

Para além destas estratégias, a maioria dos alunos mostrou ter conhecimentos sobre a segunda e primeira derivada, pontos de inflexão, quadros de sinais e concavidades da função original e, sempre que possível, mobilizaram o conhecimento prévio para desenvolver conhecimento novo. Para além destes conhecimentos, os alunos utilizaram com sucesso diversas heurísticas para resolver problemas, nomeadamente, identificaram os dados e a questão, organizaram a informação, partiram do que já sabiam (conhecimento prévio sobre a primeira derivada), registaram os cálculos e analisaram a consistência da solução.

Relativamente às dificuldades que os alunos manifestaram, estas relacionam-se com o contexto dos problemas de otimização. Segundo Cabral (2015), os alunos mostram desconsiderar a importância de resolver e responder ao problema de acordo com o contexto apresentado, tanto nos procedimentos como na resposta final. Para além disso, os alunos revelam também algumas dificuldades de interpretação no que se refere a problemas não equacionados. Também alguns alunos do meu estudo desconsideraram o contexto do problema e, consequentemente, apresentaram resoluções onde consideram tempos negativos e onde não consideram o domínio correto da função, acrescentando valores ao domínio. Este descarte do enunciado pode ter origem numa dificuldade concetual, uma vez que os alunos foram capazes de resolver algebricamente o que lhe era pedido, mas depois não compreenderam os procedimentos envolvidos nessa resolução e não interpretaram os resultados à luz do problema. Um exemplo desta situação é a resolução da figura 45, presente no capítulo 5, onde o aluno depois de ter obtido aquele quadro não se questionou se seria possível uma função que fornece a concentração de um medicamento, inicialmente decrescer e posteriormente crescer, ou seja, significaria que quando administramos o medicamento, ele teria o seu efeito máximo, com o passar do tempo ele atingiria o seu efeito mínimo e depois voltaria a aumentar o efeito.

Analogamente aos alunos do estudo de Gil (2014), os alunos do estudo presente, quando obtiveram resultados erróneos, aquando da manipulação algébrica, não possuíram espírito crítico, para avaliar se a solução encontrada era, ou não, adequada ao problema, encarando a solução fora do contexto. Um exemplo destes resultados foram as resoluções às questões 2 e 3 da tarefa 4 (ver Anexo 11), onde os alunos consideraram tempos negativos.

Contrariamente às pesquisas de Kieran (2007), no contexto dos problemas de otimização, a passagem da linguagem natural para a algébrica não representou uma dificuldade para a maioria dos alunos do meu estudo, apenas existindo alguns que evidenciaram esta dificuldade na tradução das representações.

Segundo Cabral (2015), alguns alunos utilizam a máquina calculadora para reproduzir a função original, com o intuito de a estudar, porém, nos alunos deste estudo isso não se observou. Os alunos retiravam conclusões sobre a função original recorrendo ao estudo do sinal da função derivada, sem recorrerem a máquina calculadora para reproduzir a função original. Porém, algumas destas resoluções careciam de justificação, ou seja, alguns alunos apresentaram resoluções incompletas, não sentido falta de justificar com linguagem natural o seu raciocínio.

6.3. Reflexão final

Após terminar este trabalho considero fundamental fazer uma reflexão sobre as minhas aprendizagens e as dos alunos, sobre a unidade de ensino que lecionei e as estratégias que utilizei e, por último, sobre futuros trabalhos e questões que ficaram em aberto.

Quero começar por dizer que esta foi uma experiência bastante enriquecedora, porque tive oportunidade de trabalhar com uma excelente professora cooperante, que me lançava desafios em todas as aulas, com o intuito de me tornar melhor e com uma turma bastante interessada, participativa e curiosa. Esta combinação fez-me crescer profissionalmente, uma vez que a turma exigia de mim um conhecimento aprofundado dos conteúdos programáticos, muitas vezes além do necessário à lecionação da subunidade, dado que era uma turma muito curiosa e constituída por alunos perspicazes. Desde o início do ano letivo, desenvolvi um relacionamento próximo com a turma, o que facilitou a lecionação e tornou a minha experiência mais benéfica. A partir do trabalho desenvolvido com estes alunos também pude observar a importância e as vantagens do trabalho de grupo e, por isso mesmo, levo comigo estes valores para o meu trabalho futuro.

Para além desse crescimento como professora, também cresci como pessoa, uma vez que este estágio exigiu de mim mais maturidade, responsabilidade e tolerância e permitiu-me trabalhar as maiores dificuldades que encontrei: chegar individualmente aos alunos enquanto outros estavam a intervir no quadro e gerir o tempo da aula.

Relativamente às aprendizagens dos alunos, considero que realizaram aprendizagens significativas e enriquecedoras. A minha lecionação correu bem, tendo conseguido que os alunos realizassem aprendizagens significativas sobre a segunda derivada, usando como suporte tarefas e *Powerpoints* que construí e planeei. Estas tarefas tinham os conteúdos apropriados, eram de diversos tipos e estavam de acordo com as metas curriculares, mas se pudesse reformular algumas, fá-lo-ia, de modo a intercalar o grau de dificuldade das questões. Para além da diversidade de tarefas (exercícios e problemas), existiu também diversidade das questões, e consequentemente, diferença do tipo de resoluções, nomeadamente analíticas, gráficas e numéricas, trabalhando o conhecimento dos alunos.

Ainda neste tópico, mas relacionando-o com a subunidade, creio que os alunos tenham aprendido os tópicos que lecionei, mais concretamente, a noção de segunda derivada, a relação desta com a função original e de que forma esta auxilia na resolução de problemas de otimização. Para facilitar estas aprendizagens, tentei sempre que possível utilizar problemas contextualizados no quotidiano e utilizar diversos recursos, nomeadamente *Powerpoint*, tarefas e vídeos, para que a informação fosse mais facilmente compreendida por um maior número de alunos.

Em termos de estratégias que utilizei, para além das que já mencionei, os momentos em que dividi as aulas foram cruciais para o seu bom desenvolvimento e aproveitamento. Refiro-me, assim, à introdução da tarefa, ao momento de trabalho autónomo, ao de discussão e ao de síntese. Os momentos de trabalho autónomo eram fundamentais para que os alunos percebessem o que lhes era pedido e que tentassem resolver a questão e, estes momentos por serem desenvolvidos em grupo, eram bastante enriquecedores, porque os alunos ajudavam-se uns aos outros, procurando clarificar as questões e dificuldades e complementando o raciocínio do parceiro. Os momentos de discussão eram bastante proveitosos, porém os mais difíceis de gerir. Como a turma era curiosa, surgiam sempre questões difíceis durante a discussão das tarefas, que por vezes não sabia responder de imediato. Apesar disto, as discussões eram sempre ricas e tive pena de não ter fornecido mais tempo a estes momentos, porque acredito que os alunos teriam chegado a alguns resultados em grande grupo, sem ter sido necessário a minha intervenção. Para além das resoluções que recolhi, foram estes momentos de discussão que me permitiram observar a evolução dos conhecimentos dos alunos, até porque o que não observava em sala de aula, observava posteriormente nas gravações, o que era muito interessante.

Após refletir sobre a dinâmica da aula, o tipo de tarefas que adotei, os momentos de discussão proporcionados, o trabalho a pares e os recursos que utilizei, parece ser possível concluir que a articulação destes fatores contribuiu para melhorar as aprendizagens, tornando-as mais significativas. Assim sendo, considero que os aspetos enunciados anteriormente podem informar os professores na melhoria do ensino desta unidade curricular.

Por último, vou refletir sobre possíveis trabalhos futuros e questões que tenham ficado em aberto. Apesar do meu trabalho ser sobre a segunda derivada e ter sido realizado num contexto particularmente favorável, com alunos muito empenhados e com conhecimentos matemáticos bem consolidados, seria interessante, em futuras investigações, analisar qual o contributo do estudo da primeira derivada no estudo da segunda derivada e como compreendem os alunos a noção de segunda derivada se não possuírem conhecimentos sólidos sobre a primeira derivada. Para além destas, poderia ser interessante analisar o contributo da calculadora na resolução de exercícios utilizando a segunda derivada, procurando identificar a origem das dificuldades encontradas nas resoluções dos alunos e como desenvolver e promover mais o raciocínio gráfico.

Referências

Almeida, C., & Viseu, F. (2002). Interpretação gráfica das derivadas de uma função por professores estagiários de Matemática. *Revista Portuguesa de Educação, 15(1),* 193-219.

Aspinwall, L., Shaw, K., & Presmeg, N. (1997). Uncontrollable mental imagery: graphical connections between a function and its derivative. *Educational Studies in Mathematics, 33,* 301-317.

Becker, H. S., & Geer, B. (1969). Participant observation and interviewing: a comparison. In J. G. McCall, & J. L. Simmons (Eds), *Issues in participant observation: a text and reader* (pp.322-331). Reading, MA: Addison-Wesley.

Bogdan, R., & Biklen, S. K. (1994). *Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos.* Porto: Porto Editora.

Bransfrd, J. D., Brown, A. L., &, Cocking, R. R. (1999). *How people learn: brain, mind, experience, and school*. Washington, DC: National Academy.

Canavarro, A. P. (2011). Ensino exploratório da Matemática: práticas e desafios. *Educação e Matemática, 115,* 11-17.

Cabral, J. (2015). *Problemas de otimização no contexto das derivadas* (Relatório da Prática de ensino supervisionada, Universidade de Lisboa, Portugal).

Carvalho, L. I., Ferreira, R., & Ponte, J. P. (2011). Representações no estudo das funções racionais. In A. Henriques, C. Nunes, A. Silvestre, H. Jacinto, H. Pinto, A. Caseiro, & J. P. Ponte (Orgs.), *Actas do XXII SIEM* (pp.179-192). Lisboa: APM.

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2000). *Research methods in education.* London: Routledge & Falmer.

Consciência, M., & Oliveira, H. (2011). Conexões entre representações, em funções não familiares, mediadas pela calculadora gráfica: o caso do Diogo. In A. Henriques, C. Nunes, A. Silvestre, H. Jacinto, H. Pinto, A. Caseiro, & J. P. Ponte (Orgs.), *Actas do XXII SIEM* (pp.745-750). Lisboa: APM.

Costa, B., Resende, L., & Rodrigues, E. (2010). *Matemática A: Espaço 12.* Porto: Asa Editora.

Costa, B., Rodrigues, E. (2015). *Matemática A 12º ano: Novo espaço parte 2*. Porto: Porto Editora.

Costa, B., Rodrigues, E. (2015). *Matemática A 12º ano: Novo espaço caderno prático*. Porto: Porto Editora.

Domingos, A. (2003). *Compreensão de conceitos matemáticos avançados – a matemática no início do superior* (Tese de Doutoramento, Universidade Nova de Lisboa, Portugal).

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine.* Berna: Peter Lang.

Ferreira, B. S. (2012). *Problemas de máximos e mínimos* (Dissertação de Mestrado, Universidade de Lisboa, Portugal).

Gil, R. (2014). *A aprendizagem da noção de derivada no 11.º ano* (Relatório da Prática de ensino supervisionada, Universidade de Lisboa, Portugal).

Gipps, C. (1999). Socio-cultural aspects of assessment. *Review of Research in Education, 24,* 355-392.

Habre, S., & Abboud, M. (2006). Students' conceptual understanding of a function and its derivative in an experimental calculus course. *Journal of Mathematical Behavior*, *25*, 57-72.

Haciomeroglu, E., Aspinwall, L., & Presmeg, N. (2010). Contrasting cases of calculus student's understanding of derivative graphs. *Mathematical Thinking and Learning, 12*, 152-176.

Heid, K. M. (1988). Resequencing skills and concepts in applied calculus using the computer as a tool. *Journal for Research in Mathematics Education, 19*(1), 3-25.

Jorro, A. (2000). *L´enseignant et l´évaluation*. Bruxelles: Éditions De Boeck Université.

Kendal, M., & Stacey, K. (2003). Tracing learning of three representations with the differentiation competency framework. *Mathematics Education Research Journal*, *15*(1), 22-41.

Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at middle school through college levels. In F. K. Lester Jr. (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp.707-762). Reston, VA: NCTM.

Malaspina, U., & Font, V. (2010). The role of intuition in the solving of optimization problems. *Educational Studies in Mathematics*, *75*, 107-130.

Matias, L., Vivas, P., & Castelo, R. (2010). *Essencial Matemática A 12º ano*. (1ª edição). Lisboa: Sebenta editora.

ME (2002). *Programa de Matemática A do Ensino Secundário*. Lisboa: ME, DES.

MEC (2014). *Programa e Metas curriculares de Matemática do Ensino Secundário*. Lisboa: MEC.

Menezes, L., Ferreira, R.T, Martinho, M. H, & Guerreiro, A. (2013). Comunicação matemática nas práticas letivas dos professores. In J.P. Ponte (Org.), *Práticas Profissionais dos Professores de Matemática* (pp. 135-164). Lisboa: IEUL

NCTM (1994). *Normas profissionais para o ensino da matemática*. Lisboa: APM (obra original em inglês, publicada em 1991).

NCTM (2007). *Princípios e normas para a Matemática Escolar*. Lisboa: APM.

NCTM (2008). *Princípios e normas para a matemática escolar*. Lisboa: APM (obra original em inglês, publicada em 2000).

Oliveira, H., Menezes, L., & Canavarro, A. P. (2013). Conceptualizando o ensino exploratório da matemática: contributos da prática de uma professora do 3.º ciclo para a construção de um quadro de referência. *Quadrante, 22*(2), 29-53.

Orhun, N. (2012). Graphical understanding in mathematics education: derivate functions and students' difficulties. *Procedia – Social and Behavioral Sciences, 55*, 679-684.

Orton, A. (1983). Students' understanding of differentiation. *Educational Studies in Mathematics*, *14(3)*, 235-250.

Pinto, J., & Santos, L. (2006). *Modelos de avaliação das aprendizagens*. Lisboa: Universidade Aberta

Pólya, G. (1980). On solving mathematical problems in high school. In S. Krulik & R. Reys (Eds.), *Problem solving in school mathematics* (pp. 1-2). Reston, VA: NCTM.

Pólya, G. (1957/2004). *How to Solve It: a new aspect of mathematical method*. Princeton and Oxford: Princeton University Press.

Ponte, J. P. (1992). The history of the concept of function and some educational implications. *The Mathematics Educator, 3(2*), 3-8.

Ponte, J. P. (2002). Investigar a nossa própria prática. In GTI (Ed.), *Reflectir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 5-28). Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P., & Sousa, H. (2010). Uma oportunidade de mudança na Matemática do ensino básico. In GTI (Org.), *O professor e o programa de Matemática do ensino básico* (pp. 11-41). Lisboa: APM.

Proulx, J. (2013). Mental mathematics, emergence of strategies, and the enactivist theory of cognition. *Education Studies in Mathematics, 84,* 309-328.

Roldão, M. (2009). *Estratégias de ensino*. Vila Nova de Gaia: Fundação Manuel Leão.

Santos, L. (2011). Que critérios de qualidade para a avaliação formativa? In D. Fernandes (Org.), *Avaliação em educação: Dez olhares sobre uma prática social incontornável (pp. 155-165).* Curitiba: Editora Melo.

Schoenfeld, A. H. (1988). When good teaching leads to bad results: The disasters of well-taught mathematics classes. *Educational Psychologist, 23* (2), 145-166.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical Problem-Solving.* San-Diego, CA: Academic Press.

Sierpinska, A. (1994). *Understanding in mathematics*. Londres: Flamer Press.

Silva, F. (2012). *Pensamento Algébrico: o sentido de símbolo e de variável em alunos do 8.º ano de escolaridade* (Relatório da Prática de Ensino Supervisionada, Universidade de Lisboa, Lisboa).

Skemp, R. (1978). Relational understanding and instrumental understanding. *Arithmetic Teacher*, *26(3)*, 9-15.

Stein, M., & Smith, M. (2009). Tarefas matemáticas como quadro para a reflexão: Da investigação à prática. *Educação e Matemática*, *105*, 22-28.

Swanagan, B. S. (2012). *The impact of student´s understanding of derivatives on their performance while solving optimization problems* (Tese de Doutoramento, University of Georgia, USA).

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12*, 151-169.

Tall, D. (2001). Natural and formal infinities. Retirado em janeiro, 15, 2016 de: https://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2001p-esm-infinity.pdf

Threlfall, J. (2002). Flexible mental calculations. *Educational Studies in Mathematics*, *50(1),* 29–47.

Valério, N. (2005). Papel das representações na construção da compreensão Matemática dos alunos do 1º ciclo. *Quadrante, 14* (1), 37-65.

Vasques, I. (2015). Função derivada e a sua relação com a função original, em diferentes representações (Relatório da Prática de ensino supervisionada, Universidade de Lisboa, Portugal).

Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 65-81). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Education in Science and Technology, 14*, 293-305.

Whickelgren, W. A. (1974). *How to solve mathematical problems.* New York, NY: Dover Publications.

Zimmermann, W. (1991). Visual thinking in calculus. In W. Zimmermann, & S. Cunningham (Eds.), *Visualization in teaching and learning mathematics* (pp. 127-137). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Anexos

Anexo 1 – Autorização aos Encarregados de Educação

ESCOLA SECUNDÁRIA DA RAMADA

Exmo.(a) Sr.(a) Encarregado(a) de Educação,

Ramada

Eu, Cristiana Vanessa Sousa Coito, encontro-me a realizar o Mestrado em Ensino de Matemática na Universidade de Lisboa. No âmbito do referido Mestrado estou a desenvolver um projeto de cariz investigativo no âmbito da unidade de Cálculo Diferencial II.

Para o desenvolvimento deste trabalho será necessário recolher dados em contexto de sala de aula na turma 12.ºE da Escola Secundária da Ramada. Os dados a recolher incluem a gravação áudio e vídeo de alguns momentos da aula, nomeadamente as discussões com toda a turma e de entrevistas aos alunos. Este processo não interfere com o normal funcionamento das atividades letivas e não traz qualquer prejuízo para os participantes, estando salvaguardados os direitos de privacidade e anonimato que assistem ao seu(sua) educando(a). Face ao exposto, solicito autorização para a referida recolha de dados.

Agradeço antecipadamente a colaboração e atenção dispensada.

Com os melhores cumprimentos,

Prof.ª Inês Campos
Prof.ª Estagiária Cristiana Coito

Agradeço assinatura e devolução do destacável

Eu, ____ encarregado(a) de educação do aluno____, nº ______da turma ____ do 12º Ano de escolaridade, da Escola Secundária da Ramada, tomei conhecimento dos objetivos do trabalho a desenvolver que envolverá a referida turma, na disciplina de Matemática e ___________________(autorizo/ não autorizo) a participação/colaboração do meu educando na realização do mesmo.

Em relação às gravações áudio/vídeo das entrevistas que serão utilizadas para a concretização do estudo, salvaguardando o respetivo anonimato, ___________________ (autorizo/ não autorizo) a participação/colaboração do meu educando.

_________________________________, ___ de ___________________de 2015

O/A Encarregado/a de Educação

____

Anexo 2 – Plano de aula 1

Plano de aula - 4 de março

Aula de 90 minutos (2 tempos) a realizar no dia 04/03/2016, das 10h00 às 11h30 Este plano de aula incidirá nas lições nº 122 e 123.

Sumário: Revisão da primeira derivada de uma função.

<u>Tópico/Subtópico:</u> Derivada de primeira ordem, quadro de variação, intervalos de monotonia e extremos.

<u>Objetivos específicos:</u>

- rever os conhecimentos relativos à primeira derivada de uma função
- relacionar as propriedades da primeira derivada com as da função original, em diferentes representações
- construção de quadros de sinal para estudar a monotonia e os extremos de funções

<u>Conhecimentos prévios dos alunos:</u>

- primeira derivada (11.º ano)
- extremos relativos
- intervalos de monotonia
- quadros de sinal

<u>Capacidades transversais:</u> comunicação e raciocínio matemático, autonomia, espírito crítico, rigor na escrita e interpretação de enunciados.

<u>Recursos:</u>

- do professor – versão resumida do documento "plano de aula" e *Powerpoint*;
- dos alunos – material de escrita, calculadora e tarefa 1

<u>Avaliação:</u> esta aula tem uma avaliação reguladora, para que os alunos consigam perceber onde ainda existem algumas dúvidas sobre a primeira derivada e a sua relação com a função original. Também é reguladora para o professor, porque fica com o conhecimento das lacunas dos alunos e o que falta trabalhar melhor neste âmbito. Pretendo assim avaliar os conhecimentos dos alunos sobre a primeira derivada, ficando com o registo tanto das resoluções que recolherei antes da discussão como das respostas deles durante as discussões, através do registo vídeo e avaliar o empenho e envolvimento dos alunos na aula e a sua participação durante a discussão. Ter em atenção o acompanhamento de alguns alunos de forma a motivá-los e estar atenta às suas dificuldades.

<u>Desenvolvimento da aula</u>

0. <u>Introdução – 5 minutos</u>: entrada dos alunos e ditar o sumário; o professor explica o que se vai fazer e o modo como vai decorrer a aula. Nesta altura informa que cada par de alunos irá entregar uma resolução escrita da tarefa que será distribuída e é com base na outra que se fará a discussão. Para além disso informa que a parte da tarefa que não

conseguirem realizar em sala de aula será para realizar em casa e corrigida na aula seguinte, onde existirem dúvidas, sendo que esse trabalho de casa também será recolhido.

1. <u>Exploração e discussão dos diapositivos 1 ao 9, em grande grupo – 20 minutos</u>: esta exploração e discussão será em grande grupo e, tendo em conta que se vai rever um conceito, terei um papel mais saliente, conduzindo os alunos nessa revisão. Porém vão existir diapositivos que exigirão trabalho autónomo (diapositivos 8 e 9). Durante a discussão, o papel do aluno é expor e explicar o seu raciocínio e o papel do professor é orientar, garantir que as intervenções são ordeiras, que existe rigor na linguagem e sintetizar a informação.

Diapositivos 1 a 4	
Rever, com os alunos, a relação existente entre o sinal da primeira derivada e o sentido de variação da função, ilustrando, através da representação gráfica, as várias situações possíveis. Estudar a existência de extremos relativos de uma função nos pontos onde a derivada se anula e levar os alunos a reconhecer, através da representação gráfica, quando é que um zero da derivada é um máximo ou um mínimo relativo da função. Discutir com os alunos a relação entre a mudança de sinal da primeira derivada e a existência de extremo relativo nos pontos onde a derivada se anula e observar, através da apresentação de um exemplo, que um zero da derivada nem sempre é um extremo relativo da função.	

Diapositivo 5	
Estudar a existência de extremos relativos de uma função nos pontos onde esta é contínua, mas não admite derivada e levar os alunos a reconhecer, através da representação gráfica, quando é que um ponto onde a função é contínua, mas não admite derivada é um máximo relativo. Discutir a relação entre a mudança de sinal da primeira derivada e a existência de extremo relativo nos pontos onde a função é contínua, mas não admite derivada. (Complementar a informação presente no diapositivo, ilustrando graficamente no quadro a situação em que um ponto onde a função é contínua, mas não admite derivada é um mínimo relativo bem como a situação em que tal ponto não é um extremo relativo)	

Diapositivos 6 e 7	
Estudar a existência de extremos relativos nos pontos de descontinuidade da função e levar os alunos a reconhecer, através da representação gráfica, quando é que um ponto de descontinuidade é um mínimo ou um máximo relativo da função. Discutir a relação entre a mudança de sinal das derivadas laterais e a existência de extremo relativo nos pontos de descontinuidade da função. (Complementar a informação presente no diapositivo, apresentando um exemplo em que um ponto onde a função é descontínua não é extremo relativo)	

Diapositivos 8 e 9	
Objetivo	Propor aos alunos um exercício sobre o estudo da monotonia e existência de extremos relativos de uma função.

<table>
<tr>
<td>Estratégias</td>
<td>
Ora, $h'(x) = (4 - x + \ln(x+1))' = -1 + \frac{1}{x+1} = \frac{-x-1+1}{x+1} = -\frac{x}{x+1}$
$D_{h'} =]-1, +\infty[$.
Ora $h'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{x}{x+1} = 0 \Leftrightarrow -x = 0 \wedge x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow x = 0 \wedge x \neq -1$.
<table>
<tr><th>x</th><th>-1</th><th></th><th>0</th><th>$+\infty$</th></tr>
<tr><td>$-x$</td><td>n.d.</td><td>$+$</td><td>0</td><td>$-$</td></tr>
<tr><td>$x+1$</td><td>n.d.</td><td>$+$</td><td>$+$</td><td>$+$</td></tr>
<tr><td>Sinal de h'</td><td>n.d.</td><td>$+$</td><td>0</td><td>$-$</td></tr>
<tr><td>Variação de h</td><td>n.d.</td><td>$\nearrow$</td><td>4 (máx)</td><td>$\searrow$</td></tr>
</table>
Logo, h é estritamente crescente em $]-1,0]$, estritamente decrescente em $[0, +\infty[$ e 4 é máximo absoluto em $x = 0$.
</td>
</tr>
<tr>
<td>Dificuldades dos alunos e ações perante as dificuldades</td>
<td>
1. Derivar a função
o Questionar o aluno qual é a regra de derivação que acha adequada
2. Determinar os zeros da função derivada
o Questionar o aluno sobre como obter os zeros da função derivada, ou solicitar ao colega para explicar
3. Estudar o sinal da função derivada
o Sugerir ao aluno que recorra à calculadora gráfica para estudar o sinal da função derivada OU solicitar a um colega para explicar como é que se pode fazer a partir da expressão algébrica da derivada
</td>
</tr>
</table>

2. <u>Exploração seguida de discussão da questão 1 (exploração de modo autónomo, pelos alunos) – 15 minutos</u>: neste momento, de trabalho a pares, vou circular pela sala, interpelando os alunos através de questões orientadoras, definidas ao longo do plano de aula. É neste momento que observo as estratégias que surgem e quais os alunos que as utilizam, para gerir o momento de discussão seguinte.

<table>
<tr><th>Questão 1</th><th>15 minutos</th></tr>
<tr><td>Objetivo</td><td>Relacionar as propriedades da primeira derivada com as caraterísticas da função original, em diferentes representações.</td></tr>
<tr><td>Estratégias</td><td>
a) Como $f(x) = \frac{\ln(x)-2}{x}$, então $f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\times x - \ln(x) + 2}{x^2} = \frac{1-\ln(x)+2}{x^2} = \frac{3-\ln(x)}{x^2}$.
Logo, os alunos indicam que $f'(x) = \frac{3-\ln(x)}{x^2}$.
b) Antes de iniciarem o estudo da função, têm de retirar do enunciado a informação que $g(x) = 110f(x)$.
</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td></td>
<td>
Pretende-se, assim, estudar analiticamente esta nova função $g(x)$, para saber quando ela é máxima.
Ora $g(x) = 110f(x)$, logo $g'(x) = 110f'(x) = 110 \times \left(\frac{3-\ln(x)}{x^2}\right) = \frac{330-110\ln(x)}{x^2}$
Para $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{330-110\ln(x)}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 330 - 110\ln(x) = 0 \wedge x^2 \neq 0 \Leftrightarrow \ln(x) = 3 \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow x = e^3$
Como a função f está definida em $[10,100]$ e $g(x) = 110f(x)$, então g está definida no mesmo intervalo (multiplicar por uma constante não altera o domínio)
<table>
<tr><td>x</td><td>10</td><td></td><td>e^3</td><td>100</td></tr>
<tr><td>f'</td><td></td><td>$+$</td><td>0</td><td>$-$</td></tr>
<tr><td>f</td><td></td><td>$\nearrow$</td><td>máximo</td><td>$\searrow$</td></tr>
</table>
Logo, a idade é máxima para $x = e^3 \cong 20$ anos e a concentração máxima é $g(e^3) \cong 5{,}5$ litros.
</td>
</tr>
<tr>
<td>Dificuldades dos alunos e ações perante essas dificuldades</td>
<td>
1. Na construção do quadro de sinal, esquecerem-se do ramo da função que estão a considerar (do domínio) e incluírem extremos extra da função, como por exemplo, o caso de caso $x = 1$, quando $x \leq 0$
    ○ Questioná-los sobre como esta função está definida e em que domínio
2. Ao associar o sinal positivo (negativo, respetivamente) da primeira derivada ao facto de a função original ser crescente (decrescente)
    ○ Recordar-lhes que têm uma síntese nas tarefas anteriores que pode ajudar e solicito para algum aluno explicar essas relações
3. No cálculo da derivada da função g
    ○ Solicito a um colega que relembre a regra de derivação de um produto de uma função por uma constante
(Nota: É capaz de haver alguns que vão calcular g(x) sem recorrer à anterior porque não se apercebem que podem aproveitar esse trabalho já feito)
</td>
</tr>
</table>

Durante a discussão, o papel do aluno é expor e explicar o raciocínio e o papel do professor é orientar, garantir que as intervenções são ordeiras, que existe rigor na linguagem e sintetizar a informação.

Como circulei pela sala no momento de trabalho autónomo identifiquei as estratégias que surgiram e que alunos as usaram. Assim, a dinâmica durante a discussão será solicitar 1 aluno (ou 2 alunos) para resolverem a questão no quadro (dependendo das estratégias que surgiram na mesma questão) e de seguida pedir-lhe para explicar o seu raciocínio à turma. Após o aluno ter explicado como pensou, pergunto à turma se todos perceberam. Mesmo que todos digam que sim, questiono um aluno para explicar o raciocínio do colega que está no quadro.

Caso tenham surgido duas estratégias e valha a pena apresentar ambas, vão dois alunos ao quadro ao mesmo tempo resolver a questão e de seguida, cada um explica à vez o seu raciocínio. Neste momento pretendo que a turma identifique as diferenças nas resoluções e as vantagens de usar cada uma delas. Pretendo discutir todas as questões seguindo esta dinâmica porque resulta bem nesta turma, visto que são muito participativos e colaborativos. Se, ao circular, observar que não existem dúvidas em alguma questão, tento confirmar questionado oralmente dois ou três alunos e se não existirem dúvidas, essa será corrigida oralmente, porque não justifica corrigir tudo no quadro.

Se durante a circulação observar que um par de alunos resolveu o exercício de forma incorreta, tento perceber como pensaram, solicitando-os para explicarem o raciocínio e através de perguntas orientadoras, questiono-os com o intuito de identificarem a incorreção. No fim dos colegas explicarem o seu raciocínio pergunto se perceberam porque é que não o podem resolver de tal forma. Se continuarem sem perceber, peço a um desses dois alunos (trabalham a pares) para ir ao quadro expor a ideia e deixo a turma comentar aquela estratégia. Finalmente formalizo a resposta e avançamos para a correção da questão seguinte.

Nesta discussão vou ter em atenção as estratégias dos alunos que necessitam de mais reforço (estão indicados acima, no plano de aula) e sempre que possível tentar que eles participem. Vou dar atenção também ao rigor matemático com que expõem o raciocínio no quadro e à comunicação matemática entre os alunos.

3. <u>Exploração das questões 2 e 3 de modo autónomo, pelos alunos – 10 minutos</u>: neste momento, de trabalho a pares, vou circular pela sala, interpelando os alunos através de questões orientadoras, definidas ao longo do plano de aula. É neste momento que observo as estratégias que surgem e quais os alunos que as utilizam, para gerir o momento de discussão seguinte.

<table>
<tr><th>Questão 2</th><th align="right">5 minutos</th></tr>
<tr><td>Objetivo</td><td>Utilizar a primeira derivada de uma função na resolução de um problema de otimização, tendo que descobrir primeiramente a função que o modela. Interpretação de resultados no contexto do problema.</td></tr>
<tr><td>Estratégias</td><td>Os alunos podem começar por escrever os dados que o problema fornece. Tendo em conta que o volume do prisma é dado pela expressão $x \times x \times h = x^2 \times h$ e no enunciado é nos dada a informação de que o volume é de 2 litros, os alunos podem concluir que $2 = x^2 \times h \Leftrightarrow h = \frac{2}{x^2}$
Depois podem escrever a expressão da área total do prisma:
$A_{total} = 2 \times A_{base} + 4 \times A_{lateral} \Leftrightarrow A_{total} = 2 \times x^2 + 4 \times x \times h.$
Como $h = \frac{2}{x^2}$, vem que $A_{total}(x) = 2x^2 + 4x \times \frac{2}{x^2} \Leftrightarrow A_{total}(x) = 2x^2 + \frac{8}{x}$
Portanto os alunos concluem que $A_{total}(x) = 2x^2 + \frac{8}{x}$ ou $A_{total}(x) = \frac{2x^3+8}{x}$.
De seguida, para minimizarem esta área, deverão recorrer a processos analíticos para derivar a função e encontrarem os valores de x, em que se anula.
Ora $A'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{6x^2 \times x - (2x^3+8) \times 1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{6x^3 - 2x^3 - 8}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{4x^3-8}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 8 = 0 \wedge x^2 \neq 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{2} \wedge x \neq 0$
<table>
<tr><td>x</td><td>0</td><td></td><td>$\sqrt[3]{2}$</td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>A'</td><td>s.s.</td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td></tr>
<tr><td>A</td><td>s.s.</td><td>$\searrow$</td><td>mínimo</td><td>$\nearrow$</td></tr>
</table>
</td></tr>
</table>

	Logo, os alunos podem concluir que a área total da embalagem é mínima para $x = \sqrt[3]{2}$. Neste caso, $h = \frac{2}{(\sqrt[3]{2})^2} = \sqrt[3]{2}$, ou seja, para que a área seja mínima a embalagem tem de ter dimensões $\sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{2}$, pelo que seria um cubo.
Dificuldades dos alunos e ações perante essas dificuldades	1. Interpretação dos dados que o enunciado fornece o Solicitar a um aluno que explique por palavras suas, a informação dada no enunciado 2. Na transformação da expressão da área de forma a depender só de uma incógnita o Solicitar a um aluno que indique quais os dados que o exercício nos fornece 3. Descobrir para que valores de x (ou h) a área é mínima o Questioná-los por que processos podemos descobrir os extremos de uma função 4. Após terem o valor de x (ou h), não perceberem porque é que aquele valor corresponde a um mínimo e não a um máximo o Solicitar a um aluno para explicar através de que processos, tendo a função, podemos verificar se um determinado valor é máximo ou mínimo

Questão 3	5 minutos
Objetivo	Relacionar as propriedades da primeira derivada com as caraterísticas da função original, na representação gráfica.
Estratégias	**Análise da figura 1** Os alunos podem escolher uma função qualquer para ser a função original e a outra seria a função derivada OU podem pensar que a função original tem grau superior à função derivada, pelo que a candidata a função original é a função g e a função derivada é a função f. Se a função g for a função original, como esta é crescente, depois decrescente e novamente crescente, a função f (função derivada) teria de ser positiva, depois negativa e novamente positiva, o que se verifica, mudando de sinal nos mesmos pontos onde a anterior muda de monotonia. Logo conclui-se que esta é a figura correta, onde a função f corresponde à função derivada de g, que é a função original. Caso os alunos começarem a análise pela figura 2: **Análise da figura 2** Os alunos podem escolher uma função qualquer para ser a função original e a outra seria a função derivada OU podem pensar que a função original tem grau superior à função derivada, pelo que a candidata a função original é a função f e a função derivada é a função g. Se a função f for a função original, como esta é decrescente e depois crescente, a função g (função derivada) teria de ser negativa e depois

	positiva, mudando de sinal no mesmo ponto que a primeira muda de monotonia, o que não acontece. Logo conclui-se que esta representação não é a correta.
Dificuldades dos alunos e ações perante essas dificuldades	1. Fazer a correspondência por não identificarem uma função para iniciar a exploração o Dizer-lhes para assumirem que a função original é uma representação qualquer e depois perceberem como seria a primeira derivada e se corresponde à outra representação Se existirem dificuldades significa que os alunos não estão a conseguir associar o sinal positivo (negativo, respetivamente) da primeira derivada ao facto de a função original ser crescente (decrescente). Perante isto, recordo-os que têm uma síntese nas tarefas anteriores que pode ajudar e solicito para algum aluno explicar essas relações.

4. <u>Discussão das questões 2 e 3 pelos alunos – 10 minutos</u>: durante a discussão, o papel do aluno é expor e explicar o seu raciocínio e o papel do professor é orientar, garantir que as intervenções são ordeiras, que existe rigor na linguagem e sintetizar a informação. Discussão semelhante à da questão 1. Nesta discussão, vou abordar a questão de a função original ser de maior grau e a primeira derivada a de menor, mesmo que não surja esta estratégia, porque é muito útil e permite trabalhar vários conceitos

5. <u>Exploração das questões 4 e 5 de modo autónomo, pelos alunos – 15 minutos</u>: neste momento, de trabalho a pares, vou circular pela sala, interpelando os alunos através de questões orientadoras, definidas ao longo do plano de aula. É neste momento que observo as estratégias que surgem e quais os alunos que as utilizam, para gerir o momento de discussão seguinte.

<table>
<tr><th>Questão 4</th><th align="right">10 minutos</th></tr>
<tr><td>Objetivo</td><td>Relacionar as propriedades da primeira derivada com as caraterísticas da função original, na representação gráfica.</td></tr>
<tr><td>Estratégias</td><td>Tendo em conta que os alunos precisam de descobrir os extremos de uma função, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos, vão ter que utilizar as propriedades da primeira derivada e relacioná-las com a função. Os alunos devem também ter em atenção que a função f está definida por ramos, pelo que terão de separar os casos, podendo começar por qualquer um.
<u>Caso $x > 0$</u>
$f(x) = xe^{\frac{2}{x}}$, logo $f'(x) = e^{\frac{2}{x}} + x \times \left(-\frac{2}{x^2}\right) e^{\frac{2}{x}} = e^{\frac{2}{x}}\left(1 - \frac{2}{x}\right)$
Para $f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{\frac{2}{x}}\left(1 - \frac{2}{x}\right) = 0 \Leftrightarrow e^{\frac{2}{x}} = 0 \vee 1 - \frac{2}{x} = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{2}{x} = 0 \Leftrightarrow x = 2$, porque $e^{\frac{2}{x}} \neq 0$.
<table>
<tr><td>x</td><td>0</td><td></td><td>2</td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>f'</td><td>s.s.</td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td></tr>
<tr><td>f</td><td>s.s.</td><td>$\searrow$</td><td>mínimo</td><td>$\nearrow$</td></tr>
</table>
</td></tr>
</table>

Logo $A = \big(2, f(2)\big) = (2,2e)$, porque A é o mínimo dessa função e o ponto $\big(2, f(2)\big)$ também.

<u>Caso $x \leq 0$</u>

$f(x) = \frac{8x}{x^2+1}$, logo $f'(x) = \frac{8\times(x^2+1)-8x\times2x}{(x^2+1)^2} = \frac{8x^2+8-16x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{-8x^2+8}{(x^2+1)^2}$

Para $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-8x^2+8}{(x^2+1)^2} = 0 \Leftrightarrow -8x^2 + 8 = 0 \wedge (x^2+1)^2 \neq 0 \Leftrightarrow$
$x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -1$, porque $(x^2+1)^2 \neq 0$

Tendo em conta que estamos no caso $x \leq 0$, a solução $x = 1$ não é aqui considerada.

x	$-\infty$	-1		0
f'	$-$	0	$+$	$+$
f	$\searrow$	mínimo	$\nearrow$	$\nearrow$

Logo $B = \big(-1, f(-1)\big) = (1,-4)$, porque B é o mínimo dessa função e o ponto $\big(-1, f(-1)\big)$ também.

Dificuldades dos alunos e ações perante essas dificuldades	1. Na construção do quadro de sinal, esquecerem-se do ramo da função que estão a considerar (do domínio) e incluírem extremos extra da função, como por exemplo, o caso de caso $x = 1$, quando $x \leq 0$ o Questioná-los sobre como esta função está definida e em que domínio 2. Ao associar o sinal positivo (negativo, respetivamente) da primeira derivada ao facto de a função original ser crescente (decrescente) o Recordar-lhes que têm uma síntese nas tarefas anteriores que pode ajudar e solicito para algum aluno explicar essas relações 3. Determinar a derivada da função

Questão 5	5 minutos
Objetivo	Relacionar as propriedades da primeira derivada com a função original, através da representação gráfica.
Estratégias	**<u>Análise da opção a)</u>** Dado que a função f não tem derivada no ponto $x = 0$ (a função tem um bico), a derivada não existe nesse ponto, ou seja, o gráfico da função tem de ter bola aberta nesse ponto, o que não se verifica nesta opção. A parte do gráfico representado à esquerda do zero possui bola fechada, logo não é esta a opção correta. **<u>Análise da opção b)</u>** Dado que a função f não tem derivada no ponto $x = 0$ (a função tem um bico), a derivada não existe nesse ponto, ou seja, o gráfico da função tem de ter bola aberta nesse ponto, o que não se verifica nesta opção. A parte do gráfico representado à direita do zero possui bola fechada, logo não é esta a opção correta.

	<u>Análise da opção c)</u> Nesta opção, o gráfico da derivada possui bola aberta no zero (no ponto $x = 0$), pelo que é uma candidata possível. Analisando a monotonia da função, esta é crescente até ao zero, depois decresce até um ponto e volta a crescer, logo o gráfico da derivada tem de positivo até ao zero, depois negativo até ao ponto em questão e voltar a ser positiva a partir dele. Analisando este gráfico, verifica-se este comportamento, pelo que esta é a opção correta. **<u>Análise da opção d)</u>** Nesta opção, o gráfico da derivada possui bola aberta do zero (no ponto $x = 0$), pelo que é uma candidata possível. Analisando a monotonia da função, esta é crescente até ao zero, depois decresce até um ponto e volta a crescer, logo o gráfico da derivada tem de positivo até ao zero, depois negativo até ao ponto em questão e voltar a ser positiva a partir dele. Analisando este gráfico, não se verifica este comportamento, dado que inicialmente o gráfico da função derivada é negativo, depois positivo e finalmente negativo outra vez. Logo, esta não é a opção correta.
Dificuldades dos alunos e ações perante essas dificuldades	1. Ao associar o sinal positivo (negativo, respetivamente) da primeira derivada ao facto de a função original ser crescente (decrescente) o Recordar-lhes que têm uma síntese nas tarefas anteriores que pode ajudar e solicito para algum aluno explicar essas relações 2. Perceberem que, como a função possui um bico em zero, a derivada não existe nesse ponto o Questionar-lhes quanto é a derivada no ponto $x = 0$

6. <u>Discussão das questões 4 e 5 pelos alunos – 10 minutos</u>: durante a discussão, o papel do aluno é expor e explicar o raciocínio e o papel do professor é orientar, garantir que as intervenções são ordeiras, que existe rigor na linguagem e sintetizar a informação. A discussão será semelhante à das questões 2 e 3.

   Se sobrar tempo, este será utilizada para realizar o exercício 6.

Questão 6	
Objetivo	Utilizar a primeira derivada de uma função na resolução de problemas. Interpretação de resultados no contexto do problema.
Estratégias	Os alunos podem começar por interpretar os dados que o problema nos fornece, ou seja, temos uma função que modela uma situação e queremos descobrir qual o seu máximo e em que instante acontece. Dado que a questão é para resolver por métodos exclusivamente analíticos, o aluno terá que derivar a função e estudar os seus extremos. Como $C(t) = t^2e^{-0,6t}$, $C'(t) = 2t \times e^{-0,6t} + t^2 \times (-0,6)e^{-0,6t} = e^{-0,6t}(2t - 0,6t^2)$.

<table>
<tr>
<td></td>
<td>Assim, para $C'(t) = 0 \Leftrightarrow e^{-0,6t}(2t - 0,6t^2) = 0 \Leftrightarrow e^{-0,6t} = 0 \vee 2t - 0,6t^2 = 0 \Leftrightarrow t(2 - 0,6t) = 0 \Leftrightarrow t = 0 \vee t = \frac{10}{3}$, porque $e^{-0,6t} \neq 0$.
<table>
<tr><td>t</td><td>0</td><td></td><td>$\frac{10}{3}$</td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>C'</td><td>0</td><td>$+$</td><td>0</td><td>$-$</td></tr>
<tr><td>C</td><td></td><td>$\nearrow$</td><td>máximo</td><td>$\searrow$</td></tr>
</table>
Portanto, os alunos concluem que a concentração é máxima para $t = \frac{10}{3}$ horas, ou seja, 3 horas e 20 minutos. O valor dessa concentração máxima é $C\left(\frac{10}{3}\right) = \left(\frac{10}{3}\right)^2 e^{-0,6\times\frac{10}{3}} \cong 1,5$ decigramas por litro de sangue.</td>
</tr>
<tr>
<td>Dificuldades dos alunos e ações perante essas dificuldades</td>
<td>1. No cálculo da primeira derivada
  o Questionar o aluno sobre qual a regra de derivação a usar
2. Em anular a primeira derivada
  o Questiono como se aplica a lei do anulamento do produto
3. Descobrir o sinal da função derivada nos intervalos estudados
  o Relembro que podem recorrer à calculadora para desenhar as funções OU solicitar a um colega para explicar como é que se pode fazer a partir da expressão algébrica da derivada
4. Apresentar o resultado, tendo em conta o contexto do problema
  o Solicito que releiam a questão e saliento que apresentar a resposta no contexto do problema é muito importante
5. Interpretar os dados que o enunciado fornece
  o Solicitar a um aluno que explique por palavras suas</td>
</tr>
</table>

Anexo 3 – Plano de aula 2

Plano de aula - 8 de março

Aula de 90 minutos (2 tempos) a realizar no dia 8/03/2016, das 11h45 às 13h15 Este plano de aula incidirá nas lições nº 124 e 125.

Sumário: Segunda derivada, concavidades e pontos de inflexão. Tarefa sobre a segunda derivada.

Tópico/Subtópico: Derivada de segunda ordem, extremos, sentido das concavidades e pontos de inflexão. Exercícios.

Objetivos específicos:

- compreender a segunda derivada em diferentes representações
- relacionar a segunda derivada com a primeira derivada e com a função original, em diferentes representações
- relacionar a segunda derivada com as concavidades e pontos de inflexão do gráfico da função original
- aplicar a segunda derivada na resolução de exercícios

Conhecimentos prévios dos alunos:

- primeira derivada
- concavidades
- extremos relativos
- monotonia

Capacidades transversais: comunicação e raciocínio matemático, autonomia, espírito crítico, rigor na escrita e interpretação de enunciados.

Recursos:

- do professor – utilização de vídeo e *Powerpoint*; versão resumida do documento “plano de aula”
- dos alunos – material de escrita e tarefa 2

Avaliação: esta aula tem uma avaliação reguladora, para que os alunos consigam perceber onde ainda existem algumas dúvidas sobre a primeira derivada. Também é reguladora para o professor, porque fica com o conhecimento das lacunas dos alunos e o que falta trabalhar melhor na primeira derivada. Pretendo assim avaliar os conhecimentos dos alunos sobre a segunda derivada, ficando com o registo tanto das resoluções que recolherei antes da discussão como das respostas deles durante as discussões, através do registo vídeo e avaliar o empenho e envolvimento dos alunos na aula e a sua participação durante a discussão.
Ter em atenção o acompanhamento de alguns alunos de forma a motivá-los e estar atenta às suas dificuldades.

Desenvolvimento da aula

0. Introdução e correção de um exercício que foi para trabalho de casa – 10 minutos: entrada dos alunos e ditar o sumário; o professor explica o que se vai fazer e o modo como vai decorrer a aula (inclui a ligação com o conteúdo da aula anterior). Nesta altura informa que fornecerá o *Powerpoint* no final da aula, para minimizar a preocupação de registos e maximizar a atenção dos alunos e participação na aula. Para além disso informa que cada par de alunos irá entregar uma resolução escrita da tarefa que será distribuída e é com base na outra que se fará a discussão. O exercício que corrigirei será o exercício 3 da tarefa 1, porque na aula anterior os alunos não tiveram oportunidade de relacionar a função original e a sua derivada graficamente.

1. Exploração e discussão dos diapositivos 2 ao 17, em grande grupo – 25 minutos: esta exploração e discussão será em grande grupo e, tendo em conta que se vai introduzir um novo conceito, terei um papel mais saliente, conduzindo os alunos nessa exploração. Porém vão existir diapositivos que exigirão trabalho autónomo. Durante a discussão, o papel do aluno é expor e explicar o seu raciocínio e o papel do professor é orientar, garantir que as intervenções são ordeiras, que existe rigor na linguagem e sintetizar a informação.

Diapositivos 1 a 3	5 minutos
Objetivo	Rever as informações que a primeira derivada nos fornece acerca da função original: a monotonia e extremos relativos de uma função. Rever quadro de sinal. Introduzir a segunda derivada sem dar a conhecer a definição. Após os alunos terem derivado outra vez a derivada de uma função, aí sim explico o que estão a fazer e denomino segunda derivada. Apresento a sua definição a e as formas de representação.
Dificuldades dos alunos e ações perante as dificuldades	1. Derivar as funções 2. Lembrar que informações a primeira derivada nos fornece acerca da função original 3. Fazer o quadro de sinal Como a revisão da primeira derivada foi realizada na aula anterior, existirão elementos da turma que se lembrarão do que estou a perguntar, logo quando algum aluno em particular não se lembrar, pergunto à turma em geral, porque a exploração é em grande grupo. 4. Perceber o porquê de derivarmos a derivada de uma função o Explico que derivando a função original duas vezes obtemos informação adicional sobre ela que iremos explorar 5. Perceber a definição de segunda derivada o Recordar que a derivada é um limite, tal como já tínhamos visto para a primeira derivada 6. Compreender o porquê de a segunda derivada ser uma função o Faço a ponte com a primeira derivada, explicando que já tínhamos visto essa informação para a primeira derivada

<table>
<tr><th>Diapositivos 4 a 7</th><th>5 minutos</th></tr>
<tr><td>Objetivo</td><td>Guiar os alunos à descoberta que o sinal da segunda derivada nos fornece informações sobre a concavidade do gráfico da função original.</td></tr>
<tr><td>Dificuldades dos alunos e ações perante as dificuldades</td><td>1. Representação gráfica
o Já tenho no slide as representações gráficas das 4 funções que pretendo analisar
2. Perceber que informação a segunda derivada nos fornece
o Solicito para identificarem caraterísticas comuns nas representações gráficas das funções cujas segundas derivadas são positivas (o mesmo para quando as segundas derivadas são negativas), de forma a guiá-los na exploração
o Tenho dois diapositivos que mostram que, quando a concavidade da função original é voltada para cima, a segunda derivada é positiva e quando a concavidade é voltada para baixo, a segunda derivada á negativa.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Diapositivos 8 a 11</th><th>5 minutos</th></tr>
<tr><td>Objetivo</td><td>Recordar o que é a concavidade de uma função e introduzir o conceito de ponto de inflexão.
Síntese da informação que a segunda derivada nos fornece: sentido das concavidades e ponto de inflexão.</td></tr>
<tr><td>Dificuldades dos alunos e ações perante as dificuldades</td><td>1. Compreender o que é a concavidade de uma função
o Rever que a concavidade é a curvatura do gráfico
2. Compreender o que é o sentido da concavidade
o Recordar-lhes que estão habituados a trabalhar com o sentido da concavidade quando relacionam o sinal do coeficiente em x^2 com a curvatura da parábola
o Explicar que a concavidade se encontra voltada para cima (baixo, respetivamente) se a curva está acima (abaixo) de qualquer das retas tangentes
3. Perceber o que é o ponto de inflexão
o Explicar que o ponto de inflexão é o ponto onde o sentido da concavidade altera
4. Compreender que no ponto de inflexão, a segunda derivada é zero
o Mostrar que, como a função é contínua, para alterar de sinal tem que obrigatoriamente passar pelo zero
5. Compreender a síntese
o Solicito a um aluno para explicar ao colega as conclusões a que chegámos
Se os alunos perguntarem se a segunda derivada nos fornece mais algum tipo de informação dizer-lhes que veremos no diapositivo seguinte, no qual vou lançar-lhes um desafio relacionado com isso mesmo</td></tr>
</table>

Diapositivos 12 a 14	5 minutos
Objetivo	Relacionar a primeira e a segunda derivada e perceber que informações conseguimos obter relacionando as duas, em relação aos extremos de uma função.
Dificuldades dos alunos e ações perante as dificuldades	1. Perceber o desafio o Solicito a um aluno para explicar ao colega o que pretendo com o desafio 2. Compreender o porquê de quando a concavidade está voltada para cima (baixo, respetivamente), a primeira derivada é crescente (decrescente) o Explicar que o declive das retas tangentes ao gráfico nessa parte, vão aumentando (diminuindo), começando por ter declive negativo (positivo), depois nulo e por fim positivo (negativo) 3. Perguntarem porque é que essa informação é importante o Responder que quanto mais informações conseguirmos retirar das expressões que possuímos mais facilmente conseguiremos estudar as funções 4. Conseguir responder ao desafio o Solicitar que utilizem duas funções como exemplos (tenho um diapositivo com dois exemplos) 5. Compreender a síntese o Solicito a um aluno para explicar ao colega as conclusões a que chegámos

Diapositivos 15 e 16	5 minutos
Objetivo	Realização, em trabalho autónomo a pares, de um exercício de aplicação de conceitos e propriedades anteriormente discutidas.
Dificuldades dos alunos e ações perante as dificuldades	1. Na determinação da primeira derivada o Solicito a um aluno para explicar ao colega como se deriva o produto de duas funções e como se deriva a função exponencial (se existirem dúvidas serão nesses parâmetros) 2. Na determinação do zero da primeira derivada o Lembrar-lhes que quando temos um produto igual a zero utilizamos a lei do anulamento do produto 3. Fazer a segunda derivada o Solicito a um aluno para explicar ao colega como se deriva o produto de duas funções e como se deriva a função exponencial (se existirem dúvidas serão nesses parâmetros)
Como este exercício é para ser realizado em trabalho autónomo e corrigido em grande	Vou circular pela sala no momento de trabalho autónomo, observando quais as estratégias que surgiram e que alunos elaboraram. Assim, a dinâmica durante a discussão será solicitar 1 aluno (ou 2 alunos) para resolverem a questão no quadro

grupo vou explicar como se desenvolverá a aula nesse momento	(dependendo das estratégias que surgiram: podem utilizar a informação que aprenderam recentemente e relacionar a primeira e a segunda derivada para descobrir se os extremos da função são máximos ou mínimos, ou podem, depois de saberem os extremos substituírem na função original e perceber se são máximos ou mínimos. Neste caso, vão dois alunos ao quadro ao mesmo tempo resolver a questão e de seguida, cada um explica à vez o seu raciocínio e pretendo que a turma aponte as diferenças nas resoluções e as vantagens de usar cada uma delas) e de seguida pedir-lhe para explicar o seu raciocínio à turma. Após o aluno ter explicado como pensou, pergunto à turma se todos perceberam. Mesmo que todos digam que sim, questiono um aluno para explicar o raciocínio do colega que está no quadro. Pretendo corrigir o exercício com esta dinâmica porque resulta bem nesta turma, visto que são muito participativos e colaborativos. Se durante a circulação observar que um par de alunos resolveu o exercício de forma incorreta, tento perceber como pensaram, solicitando-os para explicarem o raciocínio e através de perguntas orientadoras, questiono-os com o intuito de eles próprios perceberem a falha no raciocínio e, no final dos colegas explicarem o seu raciocínio, pergunto se perceberam porque é que não o podem resolver de tal forma. Se continuarem sem perceber, peço a um desses dois alunos (trabalham a pares) para ir ao quadro expor a ideia e deixo a turma comentar aquela estratégia. Finalmente formalizo a resposta e avançamos para o visionamento do vídeo Nesta discussão vou ter em atenção as estratégias dos alunos que necessitam de mais reforço (estão indicados acima, no plano de aula) e sempre que possível tentar que eles participem. Vou dar atenção também ao rigor matemático com que expõem o raciocínio no quadro e à comunicação matemática entre os alunos.

2. <u>Visionamento de um breve vídeo sobre a segunda derivada, concavidades e pontos de inflexão – 5 minutos</u>: este visionamento tem como objetivo consolidar e sistematizar o conteúdo recentemente aprendido.
   Vídeo disponível em: http://www.escolavirtual.pt/videvplayer?id=0_081pcgav

3. <u>Realização de uma tarefa com exercícios sobre a segunda derivada – 25 minutos</u>: esta tarefa consistirá num conjunto de exercícios onde os alunos aplicam as regras de derivação. Para além disso, a tarefa tem como objetivo que os alunos consigam relacionar a primeira e segunda derivada com a função original através de representações gráficas.

Questão 1	
Objetivo	A questão 1 tem como objetivo calcular a segunda derivada de algumas funções. Foram assim escolhidas devido à sua variedade, isto é, pretendo que os alunos derivem uma função logarítmica, exponencial e polinomial e que utilizem as regras de derivação.

Estratégias	**a)** $\boldsymbol{f(x) = 4ln^2(x)}$ $f'(x) = 4 \times 2 \times \ln(x) \times \frac{1}{x} = \frac{8\ln(x)}{x}$ (regra da função composta) ou $f'(x) = (4\ln(x) \times \ln(x))' = \frac{4}{x} \times \ln(x) + 4\ln(x) \times \frac{1}{x} = \frac{8\ln(x)}{x}$ (regra do produto) $f''(x) = \frac{\frac{8}{x} \times x - 8\ln(x) \times 1}{x^2} = \frac{8 - 8\ln(x)}{x^2} = \frac{8(1 - \ln(x))}{x^2}$ (regra do quociente) **b)** $\boldsymbol{f(x) = (x - 1) \times 5e^x}$ $f'(x) = 1 \times 5e^x + (x - 1) \times 5e^x = 5e^x \times (1 + x - 1) = 5xe^x$ ou $f'(x) = (5xe^x - 5e^x)' = 5e^x + 5xe^x - 5e^x = 5xe^x$ $f''(x) = 5 \times e^x + 5x \times e^x = e^x(5 + 5x)$ **c)** $\boldsymbol{f(x) = x^4 - 2x^3 - 2}$ $f'(x) = 4x^3 - 6x^2$ $f''(x) = 12x^2 - 12x = 12x(x - 1)$ **d)** $\boldsymbol{f(x) = x + 7^{-x}}$ $f'(x) = 1 + (-1) \times 7^{-x} \times \ln(7) = 1 - 7^{-x} \times \ln(7)$ $f''(x) = 0 - (-1) \times 7^{-x} \times \ln(7) \times \ln(7) = 7^{-x} \times ln^2(7)$
Dificuldades dos alunos e ações perante essas dificuldades	Perante alguma dificuldade peço ao aluno que pergunte a um colega. Se a dúvida persistir recordo as regras de derivação (da soma, produto, quociente e subtração). Se os alunos tiverem dificuldade a derivar a função exponencial ou a logarítmica indico em que página do manual estas se encontram (página nº 86 e 83).

Questão 2	
Objetivo	A questão 2 tem como objetivo relacionar a representação gráfica da função original com a primeira derivada e a segunda derivada, uma vez que os alunos têm de identificar o sinal da primeira e da segunda derivada em alguns pontos da função original.
Estratégias	**a)** $\boldsymbol{f'(a) \times f''(a) < 0}$ $f'(a) < 0$ porque a função nesse ponto é decrescente e $f''(a) > 0$ porque a função nesse ponto tem concavidade voltada para cima, logo $f'(a) \times f''(a) < 0$ **b)** $\boldsymbol{f''(b) \times f'(c) > 0}$ $f''(b) > 0$ porque a função nesse ponto tem concavidade voltada para cima e $f'(c) > 0$ porque a função nesse ponto é crescente, logo $f''(b) \times f'(c) > 0$ **c)** $\boldsymbol{f'(b) \times f''(c) < 0}$ $f'(b) > 0$ porque a função nesse ponto é crescente e $f''(c) < 0$ porque a função nesse ponto tem concavidade voltada para baixo, logo $f'(b) \times f''(c) < 0$

	$\boldsymbol{d)}\ \boldsymbol{f''(c) + f''(d) < 0}$ $f''(c) < 0$ porque a função nesse ponto tem concavidade voltada para baixo e $f''(d) < 0$ porque a função nesse ponto tem concavidade voltada para baixo, logo $f'(b) + f''(c) < 0$
Dificuldades dos alunos e ações perante essas dificuldades	Se existirem dificuldades significa que os alunos não estão a conseguir associar o sinal positivo (negativo, respetivamente) da primeira derivada ao facto de a função original ser crescente (decrescente) e não estão a conseguir associar o sinal positivo (negativo, respetivamente) da segunda derivada ao facto de a função original ter concavidade voltada para cima (baixo). Perante isto, recordo-os que têm uma síntese na tarefa que pode ajudar e solicito para algum aluno explicar essas relações.

Questão 3	
Objetivo	A questão 3 tem como objetivo relacionar as representações gráficas da função original, da primeira derivada e da segunda derivada, com o intuito de conseguirem estabelecer uma correspondência entre elas.
Estratégias	**3.1)** pensarem que se a representação II fosse a função f, como esta tem concavidade voltada para baixo, então a função f'' tinha de ser negativa em todo o domínio, o que não acontece na representação III OU pensarem que se a representação III fosse a função f'', como esta é negativa e depois positiva, então a função f tinha de ter concavidade voltada para baixo e depois para cima, o que não acontece na representação II. Portanto, responder que não. **3.2)** pensarem que se a representação I fosse a função f', como é decrescente, então a função f'' tinha de ser negativa em todo o domínio (porque se f' é decrescente, então a função original tem concavidade voltada para baixo), o que não acontece na representação II OU pensarem que se a representação II fosse a função f'', como esta é negativa e depois positiva, então a função f' tinha de decrescente e depois crescente (porque se f'' é negativa e depois positiva, então a função original tem concavidade voltada para baixo e depois para cima), o que não acontece na representação I. Portanto, responder que não. **3.3)** pensarem que a função de maior grau está associada à representação III. Assumindo que a representação III corresponde à função f, então, como f é inicialmente decrescente e depois crescente, a representação II corresponde à função f'', pois esta é inicialmente negativa e depois positiva. A representação I será a f'', porque a função original tem concavidade voltada para cima e depois para baixo e a representação I é inicialmente positiva e depois negativa. Portanto, responderem que a correspondência é

	$f \rightarrow III, f' \rightarrow II, f'' \rightarrow I.$
Dificuldades dos alunos e ações perante essas dificuldades	1. Fazer a correspondência por não identificarem uma função para iniciar a exploração o Dizer-lhes para assumirem que a função original é uma representação qualquer e depois perceberem como seria a primeira e segunda derivada e se correspondem às representações que restam (ao final de três tentativas no máximo, descobrem a correspondência) 2. As dificuldades da questão 2 também se poderão aplicar aqui

4. Discussão da tarefa com exercícios sobre a segunda derivada – 20 minutos: discussão análoga à dos diapositivos 15 e 16.

5. Sistematização dos conteúdos – 5 minutos: no final da aula, vou perguntar a vários alunos o que aprenderam nessa aula, de forma a eles próprios consolidem a matéria, guiados por mim. Nesta sistematização pretendo que foquem aspetos como:
    - Segunda derivada
    - Concavidades e pontos de inflexão (interpretação geométrica)
    - Relação do sinal da segunda derivada com o sentido das concavidades e o ponto de inflexão
    - Relação da primeira e segunda derivada

Anexo 4 – Diapositivos da aula 2

Estudo da função

Segunda derivada

8 DE MARÇO | 2015/2016

Estudo da função
Revisão da primeira derivada

Vamos começar por derivar as funções

$f(x) = x^2 \longrightarrow f'(x) = 2x$

$g(x) = -x^2 \longrightarrow g'(x) = -2x$

Que informações a 1ª derivada nos fornece?

- Monotonia (crescente ou decrescente)
- Extremos relativos (máximos e mínimos)

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'	$-$	0	$+$
f	↘	mínimo	↗

1

Estudo da função
Introdução

Vamos derivar as funções mais uma vez!

$f'(x) = 2x \longrightarrow (f'(x))' = 2$

$g'(x) = -2x \longrightarrow (g'(x))' = -2$

Definição

À derivada de f' no ponto x_0 chama-se segunda derivada ou derivada de segunda ordem de f no ponto x_0 e representa-se por $f''(x_0)$

$$f''(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f'(x_0+h) - f'(x_0)}{h} = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}$$

Desde que o limite exista e seja finito

2

Estudo da função
Introdução

Tal como foi feito para a 1ª derivada, também aqui se pode definir função derivada de 2ª ordem ou chamar simplesmente segunda derivada

Definição

Seja D o conjunto dos pontos do domínio de f' em que f' é derivável.

$$f'': D \to \mathbb{R}$$
$$x \to f''(x)$$

E representa-se por f'' ou $D^2 f(x)$ ou $\frac{d^2 f}{dx^2}$

3

Estudo da função
Introdução

Vamos derivar mais duas funções

$j(x) = (x+1)^2 \longrightarrow j'(x) = 2x + 2 \longrightarrow j''(x) = 2$

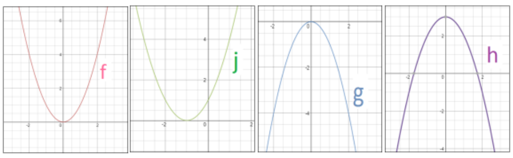
$h(x) = -x^2 + 3 \longrightarrow h'(x) = -2x \longrightarrow h''(x) = -2$

Para conseguirmos concluir algo, vamos desenhar as 4 funções que derivámos!

4

Estudo da função
Introdução

Funções:



$f(x) = x^2$ $\quad j(x) = (x+1)^2$ $\quad g(x) = -x^2$ $\quad h(x) = -x^2 + 3$

5

Estudo da função
Introdução

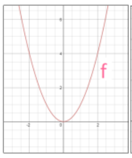
Que informação a segunda derivada nos fornece?

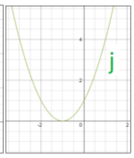
	$f(x)=x^2$	$j(x)=(x+1)^2$	$g(x)=-x^2$	$h(x)=-x^2+3$
concavidade	$\cup$	$\cup$	$\cap$	$\cap$
Segunda derivada	$f''(x)=2$	$j''(x)=2$	$g''(x)=-2$	$h''(x)=-2$
Sinal da segunda derivada	$f''(x)>0$	$j''(x)>0$	$g''(x)<0$	$h''(x)<0$

6

Estudo da função
Introdução

Que informação a segunda derivada nos fornece?



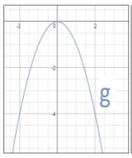


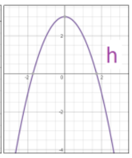
O que é que as funções têm em comum?

- Segunda derivada positiva
- Concavidade voltada para cima

6

Estudo da função
Introdução





O que é que os funções têm em comum?

- Segunda derivada negativa
- Concavidade voltada para baixo

Ou seja, o sinal da segunda derivada indica-nos o sentido da **concavidade** do gráfico

7

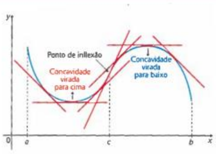
Estudo da função
Concavidade

$]a,c[$ - a curva está acima de qualquer das retas tangentes (concavidade voltada para cima e $f''>0$)

$]c,b[$ - a curva está abaixo de qualquer das retas tangentes (concavidade voltada para baixo e $f''<0$)

8

Estudo da função
Concavidade e ponto de inflexão



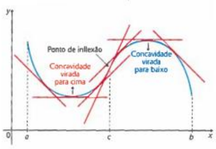
Ou seja, a segunda derivada permite identificar os **pontos de inflexão** do gráfico

E o ponto c?

É o ponto onde muda o sentido da concavidade, o qual chamamos **ponto de inflexão**.
Neste caso $(c, f(c))$ é um ponto de inflexão do gráfico

9

Estudo da função
Concavidade e ponto de inflexão



Se no intervalo $]a,c[, f''>0$ e no intervalo $]c,b[, f''<0$, o que acontece à segunda derivada no ponto c?
Como a função é contínua, para passar de um valor positivo para um valor negativo (ou vice versa), tem obrigatoriamente de passar pelo zero.
Ou seja, $f''(c)=0$.

10

Estudo da função

Concavidade e ponto de inflexão

Em síntese

Dada uma função f duas vezes derivável num intervalo $]a,b[$, o gráfico de f tem:

- A concavidade voltada para cima se $\forall x \in]a,b[, f''(x) > 0$
- A concavidade voltada para baixo se $\forall x \in]a,b[, f''(x) < 0$
- Se $f''(x) = 0$, o ponto $(x, f(x))$ é candidato a ponto de inflexão

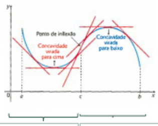
11

Estudo da função

Primeira e segunda derivada

Desafio!

Seja f um gráfico e a um ponto do gráfico.
Sabe-se que $f'(a) = 0$. Se nos derem a informação do sinal de $f''(a)$, conseguimos descobrir se a é mínimo ou máximo da função?

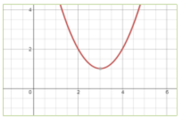


f' crescente | f' decrescente

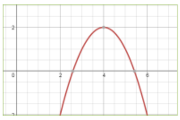
12

Estudo da função

Primeira e segunda derivada



$f'(3) = 0$
$f''(3) > 0$ → 3 é mínimo



$f'(4) = 0$
$f''(4) < 0$ → 4 é máximo

13

Estudo da função

Primeira e segunda derivada

Em síntese

Dada uma função f sabe-se que $f'(a) = 0$

- Se $f''(a) < 0$, então a função f tem um máximo para $x = a$
- Se $f''(a) > 0$, então a função f tem um mínimo para $x = a$

14

Estudo da função

Primeira e segunda derivada

Exercício

Seja $f(x) = e^{x^2} - ex^2 + 3$. Determina analiticamente os extremos de f, sem recorrer ao quadro de sinal.

$$f'(x) = 2xe^{x^2} - 2xe$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \quad 2xe^{x^2} - 2xe = 0 \Leftrightarrow 2x\left(e^{x^2} - e\right) = 0 \Leftrightarrow 2x = 0 \vee e^{x^2} - e = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = 0 \Leftrightarrow e^{x^2} = e \Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1 \vee x = -1$$

15

Estudo da função

Primeira e segunda derivada

Exercício

$$f''(x) = 2e^{x^2} + 4x^2e^{x^2} - 2e$$

$f''(0) = 2 - 2e < 0$ e $f'(0) = 0$, logo 0 é um máximo da função
$f''(1) = 4e > 0$ e $f'(1) = 0$, logo 1 é um mínimo da função
$f''(-1) = 4e > 0$ e $f'(-1) = 0$, logo -1 é um mínimo da função

16

Anexo 5 – Plano de aula 3

Plano de aula - 9 de março

Aula de 90 minutos (2 tempos) a realizar no dia 9/03/2016, das 11h45 às 13h15 Este plano de aula incidirá nas lições nº 126 e 127.

Sumário: Tarefa sobre a segunda derivada: quadros de sinal e exercícios.

Tópico/Subtópico: Derivada de segunda ordem, extremos, sentido das concavidades e pontos de inflexão. Exercícios.

Objetivos específicos:

- construção de quadros de sinal para estudar a concavidade de funções
- compreender a segunda derivada em diferentes representações
- relacionar as propriedades da segunda derivada com as da primeira derivada e com as da função original, em diferentes representações
- mobilizar o conhecimento das propriedades da segunda derivada na resolução de exercícios

Conhecimentos prévios dos alunos:

- funções
- primeira derivada
- segunda derivada
- concavidades e pontos de inflexão
- extremos relativos
- monotonia
- quadros de sinal

Capacidades transversais: comunicação e raciocínio matemático, autonomia, espírito crítico, rigor na escrita e interpretação de enunciados.

Recursos:

- do professor – versão resumida do documento "plano de aula"
- dos alunos – material de escrita, calculadora e tarefa

Avaliação: esta aula tem uma avaliação reguladora, para que os alunos consigam perceber onde ainda existem algumas dúvidas sobre a construção dos quadros de sinal de funções. Também é reguladora para o professor, porque fica com o conhecimento das lacunas dos alunos e o que falta trabalhar melhor neste âmbito. Pretendo assim avaliar os conhecimentos dos alunos sobre a segunda derivada, ficando com o registo tanto das resoluções que recolherei antes da discussão como das respostas deles durante as discussões, através do registo vídeo e avaliar o empenho e envolvimento dos alunos na aula e a sua participação durante a discussão.
Ter em atenção o acompanhamento de alguns alunos de forma a motivá-los e estar atenta às suas dificuldades.

Desenvolvimento da aula

0. Introdução e correção do trabalho de casa – 10 minutos: entrada dos alunos e ditar o sumário; o professor explica o que se vai fazer e o modo como vai decorrer a aula (inclui a ligação com o conteúdo da aula anterior). Nesta altura informa que cada par de alunos irá entregar uma resolução escrita da tarefa que será distribuída e é com base na outra que se fará a discussão. Para além disso informa que a parte da tarefa que não conseguirem realizar em sala de aula será para realizar em casa e corrigida na aula seguinte, onde existirem dúvidas, sendo que esse trabalho de casa também será recolhido. Aquando da distribuição da tarefa, o professor indica aos alunos que irão fazer em grande grupo a primeira.

1. Exploração e discussão da questão 1a), em grande grupo – 5 minutos: esta exploração e discussão será em grande grupo e terei um papel mais saliente, conduzindo os alunos nessa exploração. Vou colocar no quadro um quadro de sinal, apenas com algumas células preenchidas, para os orientar, e os alunos irão preenchê-lo com base nas propriedades já conhecidas.

<table>
<tr><th>Questão 1a)</th><th>10 minutos</th></tr>
<tr><td>Estratégias</td><td>
$Df = \mathbb{R}^+$ e $f''(x) = \dfrac{2(1-\ln(x))}{x^2}$
$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2(1-\ln(x))}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 2(1-\ln(x)) = 0 \wedge x^2 \neq 0 \Leftrightarrow$
$2 = 0 \vee (1-\ln(x)) = 0 \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow \ln(x) = 1 \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow x =$
$e \wedge x \neq 0$, porque $2 \neq 0$.
<table>
<tr><td>x</td><td>0</td><td></td><td>e</td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>f''</td><td>ss</td><td>$+$</td><td>0</td><td>$-$</td></tr>
<tr><td>f</td><td>ss</td><td>$\cup$</td><td>Ponto de inflexão</td><td>$\cap$</td></tr>
</table>
O gráfico de f tem concavidade voltada para cima em $]0, e[$ e voltada para baixo em $]e, +\infty[$. Ponto de inflexão: $(e, f(e)) = (e, 1)$.
Nota: a coluna do 0 tem ss (sem significado), porque o domínio é $\mathbb{R}^+$.
</td></tr>
<tr><td>Dificuldades dos alunos e ações perante essas dificuldades</td><td>
1. Anular o quociente
○ Lembrar que num anulamento de um quociente, o denominador tem de ser sempre diferente de zero e o numerador ser zero
2. Perceber porque é que o quadro não abrange todo o $\mathbb{R}$
○ Pedir-lhes para recordarem que só faz sentido estudar a função para os valores de x do domínio
</td></tr>
</table>

2. Exploração das questões 1, 2 e 3 de modo autónomo, pelos alunos – 25 minutos: neste momento, de trabalho a pares, vou circular pela sala, interpelando os alunos através de questões orientadoras, definidas ao longo do plano de aula. É neste momento que observo as estratégias que surgem e quais os alunos que as utilizam, para gerir o momento de discussão seguinte.

<table>
<tr><td>Questão 1</td><td>15 minutos</td></tr>
<tr><td>Objetivo</td><td>Relacionar a segunda derivada com o sentido das concavidades e pontos de inflexão do gráfico da função original.</td></tr>
<tr><td>Estratégias</td><td>

$\boldsymbol{b)\ f(x) = (x-1)e^x}$
$Df = \mathbb{R}$ e $f''(x) = e^x(1+x)$
$f''(x) = 0 \Leftrightarrow e^x(1+x) = 0 \Leftrightarrow e^x = 0 \vee (1+x) = 0 \Leftrightarrow 1+x = 0 \Leftrightarrow x = -1$, porque $e^x = 0$ é uma condição impossível.

<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>-1</td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>f''</td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td></tr>
<tr><td>f</td><td>$\cap$</td><td>Ponto de inflexão</td><td>$\cup$</td></tr>
</table>

O gráfico de f tem concavidade voltada para cima em $]-1,+\infty[$ e voltada para baixo em $]-\infty,-1[$. Ponto de inflexão: $\left(-1, f(-1)\right) = \left(-1, -\frac{2}{e}\right)$.

$\boldsymbol{c) f(x) = x^4 - 2x^3 - 2}$
$Df = \mathbb{R}$ e $f''(x) = 12x(x-1)$
$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 12x(x-1) = 0 \Leftrightarrow 12x = 0 \vee (x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1$

<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>0</td><td></td><td>1</td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>f''</td><td>$+$</td><td>0</td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td></tr>
<tr><td>f</td><td>$\cup$</td><td>Ponto de inflexão</td><td>$\cap$</td><td>Ponto de inflexão</td><td>$\cup$</td></tr>
</table>

O gráfico de f tem concavidade voltada para cima em $]-\infty,0[$ e em $]1,+\infty[$ e voltada para baixo em $]0,1[$.
Pontos de inflexão: $(0, f(0)) = (0,-2)$ e $\left(1, f(1)\right) = (1,-3)$.

$\boldsymbol{d) f(x) = x + 2^{-x}}$
$Df = \mathbb{R}$ e $f''(x) = 2^{-x} \times ln^2(2)$
$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2^{-x} \times ln^2(2) = 0 \Leftrightarrow 2^{-x} = 0 \vee ln^2(2) = 0$, mas $2^{-x} \neq 0$ e $ln^2(2) \neq 0$. Deste modo, $f''(x)$ não se anula. Como $2^{-x} > 0$ e $ln^2(2) > 0$, vem que $f''(x) > 0$

<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>f''</td><td>$+$</td><td>$+$</td></tr>
<tr><td>f</td><td>$\cup$</td><td>$\cup$</td></tr>
</table>

O gráfico de f tem concavidade voltada para cima em todo o domínio e, consequentemente, não tem pontos de inflexão.
</td></tr>
<tr><td>Dificuldades dos alunos e ações perante essas dificuldades</td><td>

1. Anular segunda derivada das funções
   - Solicitar a um aluno que indique uma maneira possível de anular a segunda derivada
</td></tr>
</table>

	2. Conseguir construir o quadro de sinal, nomeadamente por não conseguirem relacionar as propriedades da segunda derivada com as caraterísticas da função original o Pedir-lhes para recordarem o primeiro exercício que realizámos em grande grupo no início da aula 3. Na alínea d), conseguir interpretar o que significa a segunda derivada não se anular o Recordar-lhes o que significa a primeira derivada não se anular (ou a função é estritamente crescente ou estritamente decrescente)

Questão 2	5 minutos
Objetivo	Relacionar a representação gráfica da função original com as propriedades da primeira e segunda derivada, uma vez que os alunos têm de identificar o sinal da primeira e da segunda derivada em alguns pontos da função original.
Estratégias	$\boldsymbol{a}$) $\boldsymbol{f'(1) < 0}$, porque a função original nesse ponto é decrescente OU pensarem que para $f'(1)$ seja positivo, então a função original tinha de ser crescente nesse ponto, o que não acontece. $\boldsymbol{b}$) $\boldsymbol{f'(-3) < 0}$, porque a função original nesse ponto é decrescente OU pensarem que para $f'(3)$ seja positivo, então a função original tinha de ser crescente nesse ponto, o que não acontece. $\boldsymbol{c}$) $\boldsymbol{f''(-1) > 0}$, porque a função nesse ponto tem concavidade voltada para cima. $\boldsymbol{d}$) $\boldsymbol{f''(1) < 0}$, porque a função nesse ponto tem concavidade voltada para baixo OU pensarem que para $f''(1)$ seja positivo, então a função original tinha de ter a concavidade voltada para cima nesse ponto, o que não acontece.
Dificuldades dos alunos e ações perante essas dificuldades	Se existirem dificuldades significa que os alunos não estão a conseguir associar o sinal positivo (negativo, respetivamente) da primeira derivada ao facto de a função original ser crescente (decrescente) e não estão a conseguir associar o sinal positivo (negativo, respetivamente) da segunda derivada ao facto de a função original ter concavidade voltada para cima (baixo). Perante isto, recordo-os que têm uma síntese nesta tarefa e na anterior que pode ajudar e solicito para algum aluno explicar essas relações.

Questão 3	5 minutos
Objetivo	Relacionar as propriedades da segunda derivada com as da função original, na representação gráfica e algébrica.

<table>
<tr>
<td>Estratégias</td>
<td>
Podem construir um quadro de sinal, começando por verificar para que valores de x, a função segunda derivada se anula.
$g''(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$
<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>0</td><td></td><td>2</td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>g''</td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td><td>0</td><td>$-$</td></tr>
<tr><td>g</td><td>$\cap$</td><td>Ponto de inflexão</td><td>$\cup$</td><td>Ponto de inflexão</td><td>$\cap$</td></tr>
</table>
Concluírem que o gráfico de g tem concavidade voltada para baixo em $]-\infty, 0[$ e em $]2, +\infty[$ e voltada para cima em $]0,2[$ e que os pontos de inflexão são $(0, g(0))$ e $\left(2, g(2)\right)$.

a) Pensarem que, dado que os pontos de inflexão são para $x = 0$ e $x = 2$, como este gráfico tem um ponto de inflexão para um valor negativo de x, a opção é incorreta OU calculavam os zeros da segunda derivada e usariam as propriedades que já conhecem (estão apresentadas no enunciado da tarefa) e concluir que esta <u>opção é incorreta</u>.

b) Pensarem que, tendo em conta os intervalos das concavidades, como este gráfico tem inicialmente concavidade voltada para cima, depois para baixo e posteriormente para cima, concluir que esta <u>opção é incorreta</u>.

c) Pensarem que, tendo em conta os intervalos das concavidades e os pontos de inflexão, como este gráfico respeita as conclusões retiradas acima, concluir que esta <u>opção é correta</u>.
</td>
</tr>
<tr>
<td>Dificuldades dos alunos e ações perante essas dificuldades</td>
<td>
1. Conseguir relacionar o sentido das concavidades e os pontos de inflexão da função original com a função segunda derivada
o Solicito que um colega relembre os conteúdos da aula anterior
2. Conseguir anular a segunda derivada e identificar esses zeros como pontos de inflexão
o Questiono como é possível aplicar a lei do anulamento do produto quando temos o produto de fatores iguais a zero
o Solicito a um colega que relembre o que representam os zeros da segunda derivada, relacionando-os com a função original
</td>
</tr>
</table>

3. <u>Discussão das questões 1, 2 e 3 pelos alunos – 25 minutos</u>: durante a discussão, o papel do aluno é expor e explicar o seu raciocínio e o papel do professor é orientar, garantir que as intervenções são ordeiras, que existe rigor na linguagem e sintetizar a informação.

Como circulei pela sala no momento de trabalho autónomo identifiquei as estratégias que surgiram e que alunos as usaram. Assim, a dinâmica durante a discussão será solicitar 1 aluno (ou 2 alunos) para resolverem a questão no quadro (dependendo das estratégias que surgiram na mesma questão) e de seguida pedir-lhe para explicar o seu raciocínio à turma. Após o aluno ter explicado como pensou, pergunto à turma se todos perceberam. Mesmo que todos digam que sim, questiono um aluno para explicar o raciocínio do colega que está no quadro.

Caso tenham surgido duas estratégias e valha a pena apresentar ambas, vão dois alunos ao quadro ao mesmo tempo resolver a questão e de seguida, cada um explica à vez o seu raciocínio. Neste momento pretendo que a turma identifique as diferenças nas resoluções e as vantagens de usar cada uma delas. Pretendo discutir todas as questões seguindo esta dinâmica porque resulta bem nesta turma, visto que são muito participativos e colaborativos. Se, ao circular, observar que não existem dúvidas em alguma questão, tento confirmar questionado oralmente dois ou três alunos e se não existirem dúvidas, essa será corrigida oralmente, porque não justifica corrigir tudo no quadro.

Se durante a circulação observar que um par de alunos resolveu o exercício de forma incorreta, tento perceber como pensaram, solicitando-os para explicarem o raciocínio e através de perguntas orientadoras, questiono-os com o intuito de identificarem a incorreção, no fim dos colegas explicarem o seu raciocínio pergunto se perceberam porque é que não o podem resolver de tal forma. Se continuarem sem perceber, peço a um desses dois alunos (trabalham a pares) para ir ao quadro expor a ideia e deixo a turma comentar aquela estratégia. Finalmente formalizo a resposta e avançamos para a correção da questão seguinte.

Nesta discussão vou ter em atenção as estratégias dos alunos que necessitam de mais reforço (estão indicados acima, no plano de aula) e sempre que possível tentar que eles participem. Vou dar atenção também ao rigor matemático com que expõem o raciocínio no quadro e à comunicação matemática entre os alunos.

4. <u>Exploração das questões 4 e 5 de modo autónomo, pelos alunos – 10 minutos</u>: neste momento, de trabalho a pares, vou circular pela sala, interpelando os alunos através de questões orientadoras, definidas ao longo do plano de aula. É neste momento que observo as estratégias que surgem e quais os alunos que as utilizam, para gerir o momento de discussão seguinte.

Questão 4	5 minutos
Objetivo	Compreender a segunda derivada em diferentes representações, relacionar a segunda derivada com a primeira derivada e com a função original, em diferentes representações e relacionar a segunda derivada com as concavidades e pontos de inflexão do gráfico da função original.
Estratégias	**a)** Observarem que o gráfico da função f'' tem dois zeros, o que significa que a função f tem dois pontos de inflexão OU pensarem que para o gráfico da função f não ter pontos de inflexão, então o gráfico da função f'' não poderia ter zeros, o que não acontece na representação gráfica. Concluir que a <u>afirmação é falsa</u>. **b)** Observarem que o gráfico da função f'', no intervalo $]a, b[$ não tem zeros, o que significa que a função original nesse intervalo não tem pontos de inflexão OU pensarem que para a função f, no intervalo $]a, b[$ ter um ponto de inflexão, então o gráfico da função f'' teria de ter um zero nesse intervalo, o que não acontece. Concluir que a <u>afirmação é falsa</u>.

	c) Observarem que gráfico da função f'' é positivo no intervalo $]0, a[$, então o gráfico da função original tem concavidade voltada para cima nesse intervalo.
Dificuldades dos alunos e ações perante essas dificuldades	1. Relacionar o sentido das concavidades e os pontos de inflexão da função original com a função segunda derivada o Solicito que um colega relembre os conteúdos da aula anterior 2. Relacionar a primeira derivada, segunda derivada e função original, graficamente o Solicito que um colega relembre os conteúdos da aula anterior, relacionados com essa relação (máximos, mínimos, concavidades e pontos de inflexão da função original relacionando com os sinais da primeira e segunda derivada)

Questão 5	5 minutos
Objetivo	Relacionar a função original com a primeira derivada e a segunda derivada, em diferentes representações, uma vez que os alunos têm de utilizar representações gráficas e expressões analíticas. Utilizar como recurso a calculadora.
Estratégias	**5.1.** • Podem começar por equacionar o problema (para descobrirem a abcissa dos extremos, tem de se ver para que valores de x, a primeira derivada se anula): $\ln(x^2+1) - \frac{5x^2}{x^2+1} = 0$ • Podem, depois, desenhar o gráfico que visualizam: numa representação gráfica desenhar o gráfico da função $y = \ln(x^2+1) - \frac{5x^2}{x^2+1}$ e a função $y = 0$ OU podem desenhar os dois gráficos $y = \ln(x^2+1)$ e $y = \frac{5x^2}{x^2+1}$ e procurarem os pontos de interseção • Posteriormente, podem assinalar os pontos importantes, ou seja, os pontos onde as funções se intersetam: $(-11{,}93; 0)$ e $(11{,}93; 0)$ • Por último, respondem que as abcissas dos extremos da função original são $x = -12$ e $x = 12$ **5.2.** Podem descobrir qual a segunda derivada para posteriormente construir um quadro de sinal (começando por verificar para que valores de x, a função segunda derivada se anula) OU utilizarem as propriedades já conhecidas OU depois de terem os zeros, podem substituir por alguns valores antes ou depois dos zeros para ver se a função é positiva ou negativa nesses intervalos. $f''(x) = \frac{2x}{x^2+1} - \frac{10x(x^2+1) - 5x^2 \times 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2x}{x^2+1} - \frac{10x}{(x^2+1)^2}$

<table>
<tr>
<td></td>
<td>

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x}{x^2+1} - \frac{10x}{(x^2+1)^2} = 0 \Leftrightarrow 2x(x^2+1) - 10x = 0$$
$$\Leftrightarrow 2x(x^2+1-5) = 0 \Leftrightarrow 2x = 0 \vee (x^2+1-5) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -2 \vee x = 2$$

<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>-2</td><td></td><td>0</td><td></td><td>2</td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>f''</td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td><td>0</td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td></tr>
<tr><td>f</td><td>$\cap$</td><td>Ponto de inflexão</td><td>$\cup$</td><td>Ponto de inflexão</td><td>$\cap$</td><td>Ponto de inflexão</td><td>$\cup$</td></tr>
</table>

Concluírem que o gráfico de f tem concavidade voltada para baixo em $]-\infty,-2[$ e em $]0,2[$ e voltada para cima em $]-2,0[$ e em $]2,+\infty[$ e que os pontos de inflexão são $-2, f(-2))$, $(0, f(0))$ e $(2, f(2))$.

</td>
</tr>
<tr>
<td>Dificuldades dos alunos e ações perante essas dificuldades</td>
<td>

1. Anular a segunda derivada
   - Questiono como é possível aplicar a lei do anulamento do produto quando temos o produto de fatores iguais a zero
2. Conseguir derivar um quociente de funções
   - Solicito a um colega que relembre
3. Conseguir interpretar o que é pedido
   - Solicito a um colega que explique
4. Apresentar tudo o que o enunciado requer
   - Relembro todos os passos que têm de indicar para responder à questão
5. Conseguir manusear a calculadora de forma a conseguir responder ao pedido
   - Solicito que um colega ajude

</td>
</tr>
</table>

5. <u>Discussão das questões 4 e 5 pelos alunos – 10 minutos</u>: durante a discussão, o papel do aluno é expor e explicar o seu raciocínio e o papel do professor é orientar, garantir que as intervenções são ordeiras, que existe rigor na linguagem e sintetizar a informação. A discussão será semelhante à das questões 1, 2 e 3.

<u>Extensão da tarefa</u>: se sobrar tempo, este será utilizado para a realização das questões 6, 7 e 8. As questões que não forem exploradas em sala de aula serão para trabalho de casa e irão ser discutidas na aula seguinte, para que os alunos não fiquem com dúvidas. As questões presentes na extensão também servem para os alunos que já tenham terminado as anteriores.

6. <u>Sistematização dos conteúdos – 5 minutos</u>: no final da aula, vou perguntar a vários alunos o que aprenderam nessa aula, de forma a eles próprios consolidem a matéria, guiados por mim. Nesta sistematização pretendo que foquem aspetos como:
   - Compreensão da segunda derivada
   - Concavidades e pontos de inflexão (interpretação geométrica)
   - Relação do sinal da segunda derivada com o sentido das concavidades e o ponto de inflexão
   - Relação da primeira e segunda derivada e função original

Anexo 6 – Plano de aula 4

Plano de aula - 15 de março

Aula de 90 minutos (2 tempos) a realizar no dia 15/03/2016, das 11h45 às 13h15 Este plano de aula incidirá nas lições nº 130 e 131.

Sumário: Tarefa sobre otimização de problemas, envolvendo a primeira e segunda derivada.

Tópico/Subtópico: Derivada de primeira e de segunda ordem, extremos, sentido das concavidades e pontos de inflexão. Problemas de otimização.

Objetivos específicos:

- utilizar a primeira e a segunda derivada de uma função na resolução de problemas
- construir quadros de sinal para estudar a concavidade de funções
- relacionar as propriedades da segunda derivada com as da primeira derivada e com as da função original, na representação algébrica
- mobilizar o conhecimento das propriedades da primeira e da segunda derivada na resolução de problemas

Conhecimentos prévios dos alunos: funções, primeira derivada, segunda derivada, concavidades e pontos de inflexão, extremos relativos, monotonia e quadros de sinal

Capacidades transversais: comunicação e raciocínio matemático, autonomia, espírito crítico, rigor na escrita e interpretação de enunciados.

Recursos:

- do professor – versão resumida do documento "plano de aula"
- dos alunos – material de escrita, calculadora e tarefa

Avaliação: esta aula tem uma avaliação reguladora, para que os alunos consigam perceber onde ainda existem algumas dúvidas sobre o relacionamento das propriedades da primeira e segunda derivada com a função original. Também é reguladora para o professor, porque fica com o conhecimento das lacunas dos alunos e o que falta trabalhar melhor neste âmbito.
Pretendo assim avaliar os conhecimentos dos alunos sobre a primeira e segunda derivada, ficando com o registo tanto das resoluções que recolherei antes da discussão como das respostas deles durante as discussões, através do registo vídeo e avaliar o empenho e envolvimento dos alunos na aula e a sua participação durante a discussão.
Ter em atenção o acompanhamento de alguns alunos de forma a motivá-los e estar atenta às suas dificuldades.

Desenvolvimento da aula

0. Introdução e correção do trabalho de casa (exercícios 3 e 4 da tarefa anterior, caso existam dúvidas) – 10 minutos: entrada dos alunos e ditar o sumário; o professor explica o que se vai fazer e o modo como vai decorrer a aula (inclui a ligação com o conteúdo da aula anterior). Nesta altura informa que cada par de alunos irá entregar uma resolução escrita

da tarefa que será distribuída e é com base na outra que se fará a discussão. Para além disso informa que a parte da tarefa que não conseguirem realizar em sala de aula será para realizar em casa e corrigida na aula seguinte, onde existirem dúvidas, sendo que esse trabalho de casa também será recolhido.

1. Exploração das questões 1 e 2 de modo autónomo, pelos alunos – 20 minutos: neste momento, de trabalho a pares, vou circular pela sala, interpelando os alunos através de questões orientadoras, definidas ao longo do plano de aula. É neste momento que observo as estratégias que surgem e quais os alunos que as utilizam, para gerir o momento de discussão seguinte.

Questão 1	10 minutos
Objetivo	Utilizar a primeira derivada de uma função na resolução de um problema de otimização.
Estratégias	Os alunos podem começar por escrever os dados que o problema fornece. Como a cerca nova tem o mesmo comprimento que a antiga, 120 metros, então a soma do seu comprimento é igual a 120 m, ou seja, $x + x + x + x + y + y + y = 120 \Leftrightarrow 4x + 3y = 120$. Depois podem escrever a expressão da área da nova cerca $A = x^2 + y^2$. Como esta área depende de duas incógnitas, temos de transformar a expressão de forma a depender apenas de uma para a poder derivar. Como $4x + 3y = 120 \Leftrightarrow y = 40 - \frac{4}{3}x$. Substituindo na expressão da área obtemos $A = x^2 + y^2 = x^2 + \left(40 - \frac{4}{3}x\right)^2 = x^2 + 1600 - \frac{320}{3}x + \frac{16}{9}x^2 = \frac{25}{9}x^2 - \frac{320}{3}x + 1600$. Depois podem ir procurar para que valores de x, esta área é mínima. Para isso podem colocar a função $y = \frac{25}{9}x^2 - \frac{320}{3}x + 1600$ na calculadora, desenhar o gráfico e indicar o ponto de mínimo ($x = 19{,}2m$) OU podem calcular o mínimo da função analiticamente, começando por obter a expressão da primeira derivada. $A(x) = \frac{25}{9}x^2 - \frac{320}{3}x + 1600$ e assim, $A'(x) = \frac{50}{9}x - \frac{320}{3}$. $A'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{50}{9}x - \frac{320}{3} = 0 \Leftrightarrow x = 19{,}2m$. Para perceber que este valor é um mínimo e não um máximo podem construir o quadro de sinal OU pensar que a equação $y = \frac{50}{9}x - \frac{320}{3}$ é uma reta, com declive positivo, logo é negativa antes do zero e positiva depois do zero, pelo que a função original irá ser decrescente antes desse valor e crescente depois do valor, pelo que esse corresponde a um mínimo OU podem substituir, na equação, por valor anteriores e posteriores ao valor encontrado e perceber se são superiores ou inferiores a esse. Por último, concluir que as novas dimensões da cerca são $x = 19{,}2m$ e (como $y = 40 - \frac{4}{3}x$) $y = 14{,}4m$. Nota: outra estratégia semelhante é colocar a expressão da área só em função de y e fazer passos semelhantes indicados em cima para descobrir o seu valor e desse retirar, por fim, o valor de x.

<table>
<tr><td>Dificuldades dos alunos e ações perante essas dificuldades</td><td>1. Conseguir interpretar os dados que o enunciado fornece
   o Solicitar a um aluno que explique por palavras suas
2. Conseguir transformar a expressão da área de forma a depender só de uma incógnita
   o Solicitar a um aluno que indique quais os dados que o exercício nos fornece que permita simplificar a expressão
3. Conseguir descobrir para que valores de x (ou y) a área é mínima
   o Questioná-los por que processos podemos descobrir os extremos de uma função
4. Após terem o valor de x (ou y), perceberem porque é que aquele valor corresponde a um mínimo e não a um máximo
   o Solicitar a um aluno para explicar através de que processos, tendo a função podemos verificar se um determinado valor é máximo ou mínimo</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Questão 2</th><th>10 minutos</th></tr>
<tr><td>Objetivo</td><td>Utilizar a primeira e a segunda derivada de uma função na resolução de problemas. Interpretação de resultados no contexto do problema.</td></tr>
<tr><td>Estratégias</td><td>2.1. Como a contagem do tempo inicia-se às 9 horas da manhã, às 13 horas passaram 4 horas, pelo que se pretende saber quanto é $C(4)$.
Ora $C(4) = 2 \times 4e^{-0,3\times 4} = 2,4$ mg/L.

2.2. Ora o $\lim\limits_{t\to+\infty} C(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} 2te^{-0,3t} = \lim\limits_{t\to+\infty} \frac{2t}{e^{0,3t}} = 0$, porque a exponencial cresce mais rápido OU porque é equivalente a um limite notável.
Concluir que, no contexto do problema, esse valor significa que com o passar do tempo, a concentração do medicamento no sangue tende a desaparecer.

2.3. Podem pensar que, para estudar o sentido das concavidades de uma função analiticamente, recorremos à segunda derivada dessa função.
Ora $C(t) = 2te^{-0,3t}$, logo $C'(t) = 2e^{-0,3t} + 2t \times (-0,3)e^{-0,3t} = 2e^{-0,3t} - 0,6te^{-0,3t}$. Assim, $C''(t) = -0,6e^{-0,3t} - 0,18te^{-0,3t} - 0,6e^{-0,3t} = e^{-0,3t}(-1,2 - 0,18t)$.
Para $C''(t) = 0 \Leftrightarrow e^{-0,3t}(-1,2 - 0,18t) = 0 \Leftrightarrow -1,2 - 0,18t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{20}{3}$, porque $e^{-0,3t} \neq 0$.
<table>
<tr><td>t</td><td>0</td><td></td><td>$\frac{20}{3}$</td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>$C''(t)$</td><td>$-$</td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td></tr>
<tr><td>$C(t)$</td><td>$\cap$</td><td>$\cap$</td><td>Ponto de inflexão</td><td>$\cup$</td></tr>
</table></td></tr>
</table>

	Concluírem que o gráfico de g tem concavidade voltada para baixo em $[0,\frac{20}{3}[$, concavidade voltada para cima em $]\frac{20}{3},+\infty[$ e um ponto de inflexão em $\left(\frac{20}{3},C\left(\frac{20}{3}\right)\right)$. **2.4.** Pela alínea anterior, podem retirar a informação que $C'(t) = 2e^{-0,3t} - 0,6te^{-0,3t}$. Ora $C'(t) = 0 \Leftrightarrow 2e^{-0,3t} - 0,6te^{-0,3t} = 0 \Leftrightarrow e^{-0,3t}(2-0,6t) = 0 \Leftrightarrow 2 - 0,6t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{10}{3}$ horas, porque $e^{-0,3t} \neq 0$. Para perceberem que este é o tempo que corresponde a concentração máxima e não a mínima poderiam construir um quadro de sinal OU poderiam substituir valores anteriores e posteriores a esse e reparar se são superiores ou inferiores. Concluírem que a concentração máxima aconteceu às $9 + \frac{10}{3} = 12,333$ horas (a contagem começou às 9 horas), ou seja, às 12 horas e 20 minutos.
Dificuldades dos alunos e ações perante essas dificuldades	1. Conseguir resolver o limite o Solicito que um colega relembre que limites notáveis é que relacionam uma função exponencial e uma função potência 2. Conseguir interpretar o resultado do limite, no contexto da situação do problema o Solicito que leiam o enunciado de novo para perceberem de que se trata o problema 3. Conseguir anular a primeira e/ou a segunda derivadas o Questiono como é possível aplicar a lei do anulamento do produto quando temos o produto de fatores iguais a zero 4. Apresentar o resultado, tendo em conta o contexto do problema, ou seja, responderem $t = \frac{10}{3} = 3,33$ horas o Solicito que releiam a questão e saliento que apresentar a resposta no contexto do problema é muito importante

7. <u>Discussão das questões 1 e 2 pelos alunos – 20 minutos</u>: durante a discussão, o papel do aluno é expor e explicar o seu raciocínio e o papel do professor é orientar, garantir que as intervenções são ordeiras, que existe rigor na linguagem e sintetizar a informação.

Como circulei pela sala no momento de trabalho autónomo identifiquei as estratégias que surgiram e que alunos as usaram. Assim, a dinâmica durante a discussão será solicitar 1 aluno (ou 2 alunos) para resolverem a questão no quadro (dependendo das estratégias que surgiram na mesma questão) e de seguida pedir-lhe para explicar o seu raciocínio à turma. Após o aluno ter explicado como pensou, pergunto à turma se todos perceberam. Mesmo que todos digam que sim, questiono um aluno para explicar o raciocínio do colega que está no quadro.

Caso tenham surgido duas estratégias e valha a pena apresentar ambas, vão dois alunos ao quadro ao mesmo tempo resolver a questão e de seguida, cada um explica à vez o seu raciocínio. Neste momento pretendo que a turma identifique as diferenças nas resoluções e as vantagens de usar cada uma delas. Pretendo discutir todas as questões seguindo esta dinâmica porque resulta bem nesta turma, visto que são muito participativos e colaborativos. Se, ao circular, observar que não existem dúvidas em alguma questão, tento confirmar questionado oralmente dois ou três alunos e se não existirem dúvidas, essa será corrigida oralmente, porque não justifica corrigir tudo no quadro.

Se durante a circulação observar que um par de alunos resolveu o exercício de forma incorreta, tento perceber como pensaram, solicitando-os para explicarem o raciocínio e através de perguntas orientadoras, questiono-os com o intuito de identificarem a incorreção, no fim dos colegas explicarem o seu raciocínio pergunto se perceberam porque é que não o podem resolver de tal forma. Se continuarem sem perceber, peço a um desses dois alunos (trabalham a pares) para ir ao quadro expor a ideia e deixo a turma comentar aquela estratégia. Finalmente formalizo a resposta e avançamos para a correção da questão seguinte.

Em termos dos objetivos de aprendizagem, vou ter em atenção que os alunos aprendam os que defini no início do plano, isto é, que durante a discussão compreendam os conceitos e mobilizem-nos com vista a atingir os objetivos definidos anteriormente.

Nesta discussão vou ter em atenção as estratégias dos alunos que necessitam de mais reforço (estão indicados acima, no plano de aula) e sempre que possível tentar que eles participem. Vou dar atenção também ao rigor matemático com que expõem o raciocínio no quadro e à comunicação matemática entre os alunos.

8. Exploração das questões 3 e 4 de modo autónomo, pelos alunos – 20 minutos: neste momento, de trabalho a pares, vou circular pela sala, interpelando os alunos através de questões orientadoras, definidas ao longo do plano de aula. É neste momento que observo as estratégias que surgem e quais os alunos que as utilizam, para gerir o momento de discussão seguinte.

<table>
<tr><th>Questão 3</th><th>10 minutos</th></tr>
<tr><td>Objetivo</td><td>Utilizar as propriedades da primeira e a segunda derivada de uma função na resolução de problemas. Interpretação de resultados no contexto do problema.</td></tr>
<tr><td>Estratégias</td><td>3.1. Os alunos têm de perceber que o que está a ser pedido é para verificarem em que períodos, a altura da água no recipiente aumentou. Depois, têm de perceber que para estudar quando uma função cresce ou decresce podemos recorrer à primeira derivada.
Ora $h(t) = 30 + 2t + 5\ln\left(\frac{1}{(t+1)^2}\right)$, logo $h'(t) = 2 + 5 \times \frac{\frac{-1\times2\times(t+1)}{(t+1)^4}}{\frac{1}{(t+1)^2}} = 2 - \frac{10}{(t+1)}$
Portanto $h'(t) = 0 \Leftrightarrow 2 - \frac{10}{(t+1)} = 0 \Leftrightarrow \frac{10}{(t+1)} = 2 \Leftrightarrow t = 4$ horas.
<table>
<tr><td>t</td><td>0</td><td></td><td>4</td><td>10</td></tr>
<tr><td>h'</td><td></td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td></tr>
<tr><td>h</td><td></td><td>$\searrow$</td><td>mínimo</td><td>$\nearrow$</td></tr>
</table>
Concluírem que a altura da água cresce para $t \in [4,10]$. Mas como a contagem do tempo inicia-se às 8 horas, os alunos têm de concluir que a quantidade de água que está a entrar no reservatório é superior ou igual à quantidade de água que está a sair das 12 horas às 18 horas ($4 + 8 = 12$).</td></tr>
</table>

	3.2. Os alunos podem concluir, pela alínea anterior, que a altura mínima é quando $t = 4$, ou seja a altura mínima é $h(4) = 21{,}906cm$. Como o recipiente é cúbico e tem $1m$ de altura (ou seja, tem dimensões $100\ cm \times 100\ cm \times 100\ cm$), sabemos que quando $t = 4$, o volume preenchido pela água é $21{,}906 \times 100 \times 100 = 219060cm^3 = 219{,}06dm^3 = 219{,}06\ litros$. **3.3.** Os alunos para estudarem as concavidades e pontos de inflexão irão recorrer à segunda derivada, mas como já têm a primeira derivada, poderão partir daí. $h'(t) = 2 - \frac{10}{(t+1)}$, logo $h''(t) = \frac{10}{(t+1)^2}$. Para $h''(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{10}{(t+1)^2} = 0$, o que nunca acontece, ou seja, esta função não tem pontos de inflexão. Deste modo, ou tem sempre a concavidade voltada para cima ou para baixo. Como $h''(t) = \frac{10}{(t+1)^2} > 0$, os alunos podem concluir que a função h tem sempre concavidade voltada para cima em todo o seu domínio ($0 \leq t \leq 10$).
Dificuldades dos alunos e ações perante essas dificuldades	1. Apresentar o resultado, tendo em conta o contexto do problema, ou seja, responderem $h(4) = 21{,}906cm$ ou que a altura cresceu entre 4 e 10 horas o Solicito que releiam a questão e saliento que apresentar a resposta no contexto do problema é muito importante 2. Conseguir interpretar o enunciado do problema e o que é pedido o Solicito a um aluno que explique por palavras suas 3. Perceber o que significa a segunda derivada nunca se anular o Solicito a um colega que explique, relembrando esses conteúdos das aulas anteriores OU indico que poderão ir à calculadora inserir o gráfico da função original e tentarem perceber por eles próprios

Questão 4	10 minutos
Objetivo	Utilizar as propriedades da primeira derivada de uma função na resolução de problemas. Interpretação de resultados no contexto do problema.
Estratégias	**4.1.** Em primeiro lugar podem ver qual a área afetada no momento inicial (semana 0) e depois a área afetada na semana 1 OU vice-versa. $A(0) = 2$ e $A(1) = 2 - 1 + 5\ln(2) \cong 4{,}47$. Logo o aumento foi de $A(1) - A(0) = 2{,}47$ hectares. **4.2.** Para os alunos determinarem a área máxima analiticamente, recorrem à primeira derivada. Ora $A(t) = 2 - t + 5\ln(t+1)$, logo $A'(t) = -1 + \frac{5}{t+1}$.

<table>
<tr>
<td></td>
<td>
Para $A'(t) = 0 \Leftrightarrow -1 + \frac{5}{t+1} = 0 \Leftrightarrow \frac{5}{t+1} = 1 \Leftrightarrow t = 4$ semanas. Para perceberem que este tempo é o que nos dá a área máxima, os alunos podem construir um quadro de sinal OU inserir a equação $y = 2 - t + 5\ln(t+1)$ na calculadora e observar que se trata de um valor correspondente ao máximo OU podem ainda substituir por valores anteriores e posteriores e observarem se estão a obter resultados superiores ou inferiores.
<table>
<tr><td>t</td><td>0</td><td></td><td>4</td><td>16</td></tr>
<tr><td>A'</td><td></td><td>$+$</td><td>0</td><td>$-$</td></tr>
<tr><td>A</td><td></td><td>$\nearrow$</td><td>máximo</td><td>$\searrow$</td></tr>
</table>
Por último concluírem que a área máxima afetada é $A(4) = 6{,}05$ hectares.
</td>
</tr>
<tr>
<td>Dificuldades dos alunos e ações perante essas dificuldades</td>
<td>
1. Apresentar o resultado, tendo em conta o contexto do problema
   o Solicito que releiam a questão e saliento que apresentar a resposta no contexto do problema é muito importante
2. Conseguir interpretar o enunciado do problema e o que é pedido
   o Solicito a um aluno que explique por palavras suas
3. Conseguir calcular a derivada e não conseguirem construir o quadro de sinais
</td>
</tr>
</table>

9. <u>Discussão das questões 3 e 4 pelos alunos – 20 minutos</u>: durante a discussão, o papel do aluno é expor e explicar o seu raciocínio e o papel do professor é orientar, garantir que as intervenções são ordeiras, que existe rigor na linguagem e sintetizar a informação. A discussão será semelhante à das questões 1 e 2.

<u>Extensão da tarefa</u>: se sobrar tempo, este será utilizado para a realização das questões 5 e 6. As questões que não forem exploradas em sala de aula serão para trabalho de casa e irão ser discutidas na aula seguinte, para que os alunos não fiquem com dúvidas. As questões presentes na extensão também servem para os alunos que já tenham terminado as anteriores.

Anexo 7 – Plano de aula 5

Plano de aula - 16 de março

Aula de 90 minutos (2 tempos) a realizar no dia 16/03/2016, das 11h45 às 13h15 Este plano de aula incidirá nas lições nº 132 e 133.

Sumário: Estudo analítico de funções.

Tópico/Subtópico: Estudo analítico de funções

Objetivos específicos:

- mobilizar o conhecimento prévio dos alunos sobre funções, para as estudar analiticamente

Conhecimentos prévios dos alunos: funções, domínio, paridade, assíntotas, pontos de interseção do gráfico com os eixos coordenados, 1ª derivada (quadro de variação, intervalos de monotonia e extremos), 2ª derivada (quadro de sinal, concavidades e pontos de inflexão), contradomínio e representação gráfica

Capacidades transversais: comunicação e raciocínio matemático, autonomia, espírito crítico, rigor na escrita e interpretação de enunciados.

Recursos: do professor – versão resumida do documento "plano de aula"; dos alunos – material de escrita e tarefa.

Avaliação: esta aula tem uma avaliação reguladora, para que os alunos consigam perceber onde existem algumas dúvidas sobre o estudo analítico das funções. Também é reguladora para o professor, porque fica com o conhecimento das lacunas dos alunos e o que falta trabalhar melhor neste âmbito. Pretendo assim avaliar os conhecimentos dos alunos sobre as propriedades enunciadas acima no plano, ficando com o registo tanto das resoluções que recolherei antes da discussão como das respostas deles durante as discussões, através do registo vídeo e avaliar o empenho e envolvimento dos alunos na aula e a sua participação durante a discussão.
Ter em atenção o acompanhamento de alguns alunos de forma a motivá-los e estar atenta às suas dificuldades.

Desenvolvimento da aula

0. Introdução – 5 minutos: entrada dos alunos e ditar o sumário; o professor explica o que se vai fazer e o modo como vai decorrer a aula (inclui a ligação com o conteúdo das aulas anteriores). Nesta altura informa que cada par de alunos irá entregar uma resolução escrita da tarefa que será distribuída e é com base na outra que se fará a discussão. Para além disso informa que a parte da tarefa que não conseguirem realizar em sala de aula será para realizar em casa, sendo que esse trabalho de casa também será recolhido.

1. Exploração da questão 1 de modo autónomo, pelos alunos – 25 minutos: neste momento, de trabalho a pares, vou circular pela sala, interpelando os alunos através de questões orientadoras, definidas ao longo do plano de aula. É neste momento que observo as

estratégias que surgem e quais os alunos que as utilizam, para gerir o momento de discussão seguinte.

Questão 1	25 minutos
Objetivo	Mobilizar o conhecimento das propriedades das funções como o domínio, a paridade, as assíntotas, os pontos de interseção do gráfico com os eixos coordenados, a primeira derivada (o estudo do sinal da 1ª derivada), a segunda derivada (o estudo do sinal da 2ª derivada) e o contradomínio para as representar graficamente. A escolha de funções foi intencional, uma vez que pretendia que os alunos estudassem, por exemplo, uma função que não fosse par nem ímpar e outra que o fosse uma das duas (na alínea b, a função é ímpar) para relacionarem essa informação aquando da representação gráfica. Também pretendi escolher uma função que não apresentasse assíntotas verticais (é o caso da alínea c) por ser contínua e com domínio $\mathbb{R}$ e uma função em que a segunda derivada não se anulasse, por exemplo, para os alunos interpretarem esse resultado (alínea a).
Estratégias	$\boldsymbol{a)\ f(x) = \dfrac{x^2 - x}{2 - x}}$ • Domínio: $D = \{x \in \mathbb{R}: 2 - x \neq 0\} = \mathbb{R}\backslash\{2\}$ • Paridade $f(-x) = \frac{(-x)^2-(-x)}{2-(-x)} = \frac{x^2+x}{2+x}$, logo a função f não é par porque $f(-x) \neq f(x)$ e não é ímpar porque $f(-x) \neq -f(x)$ • Assíntotas ○ Assíntotas verticais $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} \left(\frac{x^2-x}{2-x}\right) = \frac{2}{0^-} = -\infty$ e $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} \left(\frac{x^2-x}{2-x}\right) = \frac{2}{0^+} = +\infty$, logo a reta $x = 2$ é assíntota vertical do gráfico de f ○ Assíntotas não verticais <u>Se $x \to +\infty$</u> $m = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{f(x)}{x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2-x}{2x-x^2}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2}{-x^2}\right) = -1$ $b = \lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - mx) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2-x}{2-x} + x\right)$ $= \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x^2 - x + 2x - x^2}{2 - x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x}{2 - x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x}{-x}\right) = -1$ logo a reta $y = -x - 1$ é assíntota oblíqua do gráfico de f quando $x \to +\infty$ <u>Se $x \to -\infty$</u> $m = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{f(x)}{x}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{x^2-x}{2x-x^2}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{x^2}{-x^2}\right) = -1$ $b = \lim\limits_{x\to-\infty} (f(x) - mx) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{x^2-x}{2-x} + x\right)$ $= \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{x^2 - x + 2x - x^2}{2 - x}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{x}{2 - x}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{x}{-x}\right) = -1$ logo a reta $y = -x - 1$ também é assíntota oblíqua do gráfico de f quando $x \to -\infty$

- Pontos de interseção com os eixos

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-x}{2-x} = 0 \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \wedge 2 - x \neq 0 \Leftrightarrow x(x-1) = 0 \wedge x \neq 2 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1 \wedge x \neq 2$, logo o gráfico de f intersecta o eixo das abcissas nos pontos de coordenadas (0,0) e (1,0)
$f(0) = 0$, logo o gráfico de f intersecta o eixo das ordenadas no ponto de coordenadas (0,0)

- Intervalos de monotonia e extremos

$$f'(x) = \left(\frac{x^2-x}{2-x}\right)' = \frac{(2x-1)\times(2-x)-(x^2-x)\times(-1)}{(2-x)^2}$$
$$= \frac{-x^2+4x-2}{(2-x)^2}$$
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-x^2+4x-2}{(2-x)^2} = 0 \Leftrightarrow -x^2+4x-2 = 0 \wedge (2-x)^2 \neq 0$$
$$\Leftrightarrow x = 2-\sqrt{2} \vee x = 2+\sqrt{2} \wedge x \neq 2$$

x	$-\infty$	$2-\sqrt{2}$		2		$2+\sqrt{2}$	$+\infty$
f'	$-$	0	$+$	ss	$+$	0	$-$
f	↘	mínimo	↗	ss	↗	máximo	↘

- Intervalos de monotonia

f é crescente nos intervalos $]2-\sqrt{2}, 2[$ e $]2, 2+\sqrt{2}[$ e f é decrescente nos intervalos $]\infty, 2-\sqrt{2}[$ e $]2+\sqrt{2}, +\infty[$

- Extremos

$f(2+\sqrt{2}) = -2\sqrt{2}-3$ é máximo relativo e $f(2-\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}-3$ é mínimo relativo

- Sentido das concavidades e pontos de inflexão

$$f''(x) = \left(\frac{-x^2+4x-2}{(2-x)^2}\right)' = \frac{(-2x+4)\left((2-x)^2\right)-(-x^2+4x-2)(2\times(2-x)\times(-1))}{(2-x)^4} = \frac{4}{(2-x)^3}$$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{4}{(2-x)^3} = 0 \Leftrightarrow 4 = 0 \wedge x \neq 2$, o que é uma equação impossível

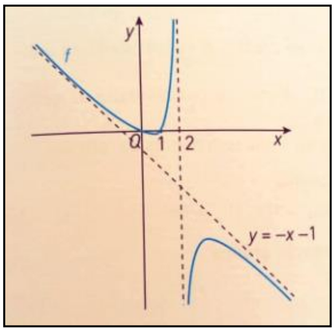
x	$-\infty$	2	$+\infty$
f''	$+$	s.s.	$-$
f	$\cup$	s.s.	$\cap$

Se $x \in]2, +\infty[$, a concavidade do gráfico é voltada para baixo e se $x \in]-\infty, 2[$, a concavidade do gráfico é voltada para cima.
O gráfico de f não tem pontos de inflexão.

- Contradomínio

$D'_f =]-\infty, -2\sqrt{2}-3] \cup [2\sqrt{2}-3, +\infty[$

- Representação gráfica



$\boldsymbol{b)\ g(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}}$

- Domínio: $D = \{x \in \mathbb{R}: x^2 - 1 > 0\} =]-\infty, -1[\ \cup\ ]1, +\infty[$
- Paridade

$g(-x) = \frac{-x}{\sqrt{(-x)^2-1}} = \frac{-x}{\sqrt{x^2-1}}$, logo a função g é ímpar porque $g(-x) = -g(x), \forall x \in D_g$

- Assíntotas
  - Assíntotas verticais

$\lim\limits_{x\to 1^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right) = \frac{1}{0^+} = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to -1^-} g(x) = \lim\limits_{x\to -1^-}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right) = \frac{-1}{0^+} = -\infty$, logo as retas $x = 1$ e retas $x = -1$ são assíntotas verticais do gráfico de g

  - Assíntotas não verticais

Se $x \to +\infty$

$m = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{g(x)}{x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x\sqrt{x^2-1}}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right) = \frac{1}{+\infty} = 0$

$b = \lim\limits_{x\to+\infty}(g(x) - mx) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right)$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x\sqrt{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}}\right) = 1$$

logo a reta $y = 1$ é assíntota horizontal do gráfico de g quando $x \to +\infty$

Se $x \to -\infty$

$m = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{g(x)}{x}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{x\sqrt{x^2-1}}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right) = \frac{1}{-\infty} = 0$

$b = \lim\limits_{x\to-\infty}(g(x) - mx) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right)$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{-x\sqrt{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}}\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-1}{\sqrt{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}}\right) = -1$$

logo a reta $y = -1$ é assíntota horizontal do gráfico de g quando $x \to -\infty$

Nota: como a função é ímpar, os alunos poderiam logo responder $y = -1$, porque já sabiam que a reta $y = 1$ é assíntota horizontal do gráfico de g quando $x \to +\infty$

- Pontos de interseção com os eixos

$g(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \wedge \sqrt{x^2-1} \neq 0 \Leftrightarrow x = 0 \wedge x \neq 1 \wedge x \neq -1$, mas como $0 \notin D_g$, o gráfico de g não intersecta o eixo das abcissas

$g(0) = 0$, mas como $0 \notin D_g$, o gráfico de g não intersecta o eixo das ordenadas

- Intervalos de monotonia e extremos

$$g'(x) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right)' = \frac{1\times\left(\sqrt{x^2-1}\right) - x\times\left(\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}\right)}{\left(\sqrt{x^2-1}\right)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{x^2-1} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}}{x^2-1} = \frac{-1}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}}$$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-1}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}} = 0 \Leftrightarrow -1 = 0 \wedge (x^2-1)\sqrt{x^2-1} \neq 0$, o que é uma equação impossível.

Como $g'(x) < 0, \forall x \in D_g$, a função g é decrescente em todo o seu domínio, ou seja, nos intervalos $]-\infty, -1[$ e $]1, +\infty[$.

Deste modo, o gráfico da função g não tem extremos.

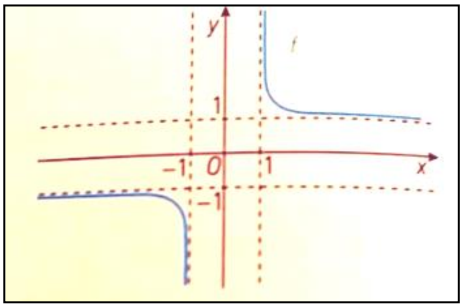
- Sentido das concavidades e pontos de inflexão

$$g''(x) = \left(\frac{-1}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}}\right)' = \left(\frac{-1}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}\right)' = \frac{\frac{3}{2}(x^2-1)^{\frac{1}{2}}(2x)}{(x^2-1)^3} = \frac{3x}{(x^2-1)^{\frac{5}{2}}}$$

$g''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3x}{(x^2-1)^{\frac{5}{2}}} = 0 \Leftrightarrow 3x = 0 \wedge (x^2-1)^{\frac{5}{2}} \neq 0$, o que é uma equação impossível, visto que $0 \notin D_g$.

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
g''	$-$	s.s.	s.s.	s.s.	$+$
g	$\cap$	s.s.	s.s.	s.s.	$\cup$

Se $x \in]-\infty, -1[$, a concavidade do gráfico é voltada para baixo e se $x \in]1, +\infty[$, a concavidade do gráfico é voltada para cima.

	O gráfico de f não tem pontos de inflexão. • Contradomínio $D'_g =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$ • Representação gráfica  ***c*) $\boldsymbol{h(x) = xe^x - e^x}$** • Domínio: $D = \mathbb{R}$ • Paridade $h(-x) = -xe^{-x} - e^{-x}$, logo a função h não é par porque $h(-x) \neq h(x)$ e não é ímpar porque $h(-x) \neq -h(x)$ • Assíntotas ○ Assíntotas verticais O domínio da função é $\mathbb{R}$ e a função é contínua por ser a diferença entre duas funções contínuas, logo o seu gráfico não admite assíntotas verticais ○ Assíntotas não verticais Se $x \to +\infty$ $m = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{h(x)}{x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{xe^x - e^x}{x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x - \frac{e^x}{x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[e^x\left(1 - \frac{1}{x}\right)\right] = +\infty$ Como $m \notin \mathbb{R}$, o gráfico de h não admite assíntota não vertical quando $x \to +\infty$ Se $x \to -\infty$ $m = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{h(x)}{x}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{xe^x - e^x}{x}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^x - \frac{e^x}{x}\right) = 0$ $b = \lim\limits_{x\to-\infty}(h(x) - mx) = \lim\limits_{x\to-\infty}(xe^x - e^x) = \lim\limits_{y\to+\infty}(-ye^{-y} - e^{-y}) = \lim\limits_{y\to+\infty}\left(-\frac{y}{e^y} - e^{-y}\right) = 0$ Fiz a mudança de variável $x = -y$, Se $x \to -\infty$, então $y \to +\infty$ logo a reta $y = 0$ é assíntota horizontal do gráfico de h quando $x \to -\infty$ • Pontos de interseção com os eixos $h(x) = 0 \Leftrightarrow xe^x - e^x = 0 \Leftrightarrow e^x(x-1) = 0 \Leftrightarrow e^x = 0 \vee x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$, porque $e^x \neq 0$, logo o gráfico de h intersecta o eixo das abcissas no ponto de coordenadas (1,0)

$h(0) = -1$, logo o gráfico de h intersecta o eixo das ordenadas no ponto de coordenadas $(0, -1)$

- Intervalos de monotonia e extremos

$h'(x) = (xe^x - e^x)' = e^x + xe^x - e^x = xe^x$
$h'(x) = 0 \Leftrightarrow xe^x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee e^x = 0 \Leftrightarrow x = 0$, porque $e^x \neq 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
h'	$-$	0	$+$
h	$\searrow$	mínimo	$\nearrow$

  - Intervalos de monotonia

h é crescente no intervalo $]0, +\infty[$ e h é decrescente no intervalo $]-\infty, 0[$

  - Extremos

$h(0) = -1$ é mínimo absoluto

- Sentido das concavidades e pontos de inflexão

$h''(x) = (xe^x)' = e^x + xe^x = e^x(1 + x)$
$h''(x) = 0 \Leftrightarrow e^x(1 + x) = 0 \Leftrightarrow e^x = 0 \vee 1 + x = 0 \Leftrightarrow x = -1$, porque $e^x \neq 0$

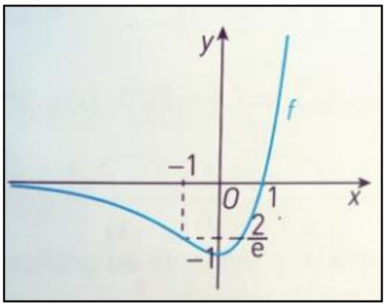
x	$-\infty$	-1	$+\infty$
h''	$-$	0	$+$
h	$\cap$	Ponto de inflexão	$\cup$

Se $x \in]-\infty, -1[$, a concavidade do gráfico é voltada para baixo e se $x \in]-1, +\infty[$, a concavidade do gráfico é voltada para cima.
O gráfico de h tem um ponto de inflexão de coordenadas $\left(-1, f(-1)\right) = \left(-1, -\frac{2}{e}\right)$

- Contradomínio

$D'_h = [-1, +\infty[$

- Representação gráfica



Dificuldades dos alunos e ações perante

1. Resolver limites
   - Solicito que um colega relembre que limites notáveis é que relacionam uma função exponencial e uma função potência
2. Analisar a paridade de uma função ou calcular as assíntotas

essas dificuldades	o Solicito a um colego que relembre 3. Determinar os zeros das funções derivadas o Questionar o aluno que equação é que pode resolver de forma a obter os zeros da função derivada 4. Estudar o sinal das funções derivadas o Solicito a um colega que ajude 5. Associar o sinal positivo (negativo, respetivamente) da primeira derivada ao facto de a função original ser crescente (decrescente) o Recordar-lhes que têm uma síntese nas tarefas anteriores que pode ajudar e solicito para algum aluno explicar essas relações 6. Determinar o domínio o Solicito a um aluno que relembre a turma como se determinam domínios das funções 7. Levantar indeterminações, decompor e simplificar polinómios o Solicito a uma colega que ajude 8. Desenhar a representação gráfica o Indico para marcarem as assíntotas e os pontos importantes que já conhecem 9. Obter as derivadas o Solicito a um colega que ajude Poderão ainda existir dificuldades com as propriedades das funções. Neste caso, solicito a um aluno que ajude.

2. <u>Discussão da questão 1 pelos alunos – 25 minutos</u>: durante a discussão, o papel do aluno é expor e explicar o raciocínio e o papel do professor é orientar, garantir que as intervenções são ordeiras, que existe rigor na linguagem e sintetizar a informação.

Como circulei pela sala no momento de trabalho autónomo, sei se existem incompreensões ou erros que quero explorar com os alunos na discussão. Se durante a circulação observar que um par de alunos resolveu o exercício de forma incorreta, tento perceber como pensaram, solicitando-os para explicarem o raciocínio e através de perguntas orientadoras, questiono-os com o intuito de perceberem a falha no raciocínio, no fim dos colegas explicarem o seu raciocínio pergunto se perceberam porque é que não o podem resolver de tal forma. Se continuarem sem perceber, peço a um desses dois alunos (trabalham a pares) para ir ao quadro expor a ideia e deixo a turma comentar aquela estratégia. Finalmente formalizo a resposta e avançamos para a correção da questão seguinte.

Assim, a dinâmica durante a discussão será solicitar 1 aluno (ou 2 alunos) para resolverem a questão no quadro (dependendo das incompreensões ou erros surgiram na mesma questão) e de seguida pedir-lhe para explicar o seu raciocínio à turma. Após o aluno ter explicado como pensou, pergunto à turma se todos perceberam. Mesmo que todos digam que sim, questiono um aluno para explicar o raciocínio do colega que está no quadro.

Em termos dos objetivos de aprendizagem, vou ter em atenção que os alunos aprendam os que defini no início do plano, isto é, que durante a discussão compreendam os conceitos e mobilizem-nos com vista a atingir os objetivos definidos anteriormente.

Nesta discussão vou ter em atenção as dificuldades dos alunos para identificar as aprendizagens que necessitam de maior reforço e sempre que possível tentar que eles participem. Vou dar atenção também ao rigor matemático com que expõem o raciocínio no quadro e à comunicação matemática entre os alunos.

3. Exploração das questões 2, 3 e 4 de modo autónomo, pelos alunos – 20 minutos: neste momento, de trabalho a pares, vou circular pela sala, interpelando os alunos através de questões orientadoras, definidas ao longo do plano de aula. É neste momento que observo as estratégias que surgem e quais os alunos que as utilizam, para gerir o momento de discussão seguinte.

<table>
<tr><th>Questão 2</th><th align="right">10 minutos</th></tr>
<tr><td>Objetivo</td><td>Mobilizar o conhecimento das propriedades de uma função, sem conhecerem a sua expressão analítica, afim de a representar graficamente.</td></tr>
<tr><td>Estratégias</td><td>

2.1.

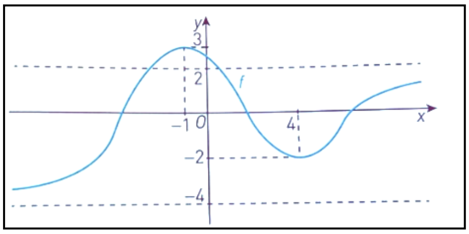
x	$-\infty$	-1		4	$+\infty$
f'	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\nearrow$	3	$\searrow$	-2	$\nearrow$

2.2.

Como $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$, então $y = 2$ é assíntota horizontal do gráfico, quando $x \to +\infty$. Como $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -4$, então $y = -4$ é assíntota horizontal do gráfico, quando $x \to -\infty$. Pela análise da tabela acima, f é crescente nos intervalos $]-\infty, -1[$ e $]4, +\infty[$ e é decrescente no intervalo $]-1, 4[$. O ponto de coordenadas $(-1,3)$ é um máximo (absoluto, por causa da assíntota) e o ponto $(4, -2)$ é um mínimo (relativo, por causa da assíntota).

Também podemos retirar que o $D_f = \mathbb{R}$, $D'_f = [-2,3]$ e que a função é contínua, porque tem derivada finita em todos os pontos.

Deste modo, uma possível representação gráfica é a seguinte:

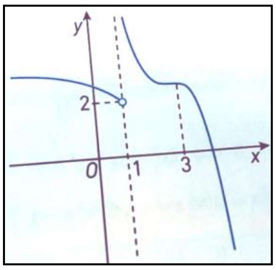


</td></tr>
<tr><td>Dificuldades dos alunos e ações perante essas dificuldades</td><td>

1. Interpretar os limites
   - Solicito a um aluno que informações os limites nos fornecem
2. Perceber que a função é contínua
   - Questiono se a função tem pontos de descontinuidade ou pontos que não pertencem ao domínio
3. Interpretar os zeros da função derivada
   - Solicito a um aluno que relembre os restantes do que significam os zeros da função derivada
4. Associar o sinal positivo (negativo, respetivamente) da primeira derivada ao facto de a função original ser crescente (decrescente)

</td></tr>
</table>

	○ Recordar-lhes que têm uma síntese nas tarefas anteriores que pode ajudar e solicito para algum aluno explicar essas relações 5. Desenhar a representação gráfica ○ Indico para marcarem as assíntotas e os pontos importantes que já conhecem 6. Retirar informações da tabela, como por exemplo, o domínio, o contradomínio, o máximo e o mínimo ○ Solicito a uma colega que ajude, pedindo para indicar o seu raciocínio

Questão 3	5 minutos
Objetivo	Mobilizar o conhecimento das propriedades de uma função, sem conhecerem a sua expressão analítica e representá-la graficamente.
Estratégias	Como a função tem domínio $\mathbb{R}\backslash\{1\}$, o ponto $x = 1$ não está definido. Como $f'(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}\backslash\{1,3\}$, então a função é decrescente em $\mathbb{R}\backslash\{1,3\}$. Como $f'(3) = 0$, 3 é um extremo da função (é máximo, porque a função é decrescente) Também sabemos que $x = 1$ é assíntota vertical do gráfico. Como $\lim_{x \to 1^-} f(x) = 2$, sabemos que a assíntota $x = 1$ é apenas do lado direito do 1. Deste modo, uma possível representação gráfica é a seguinte: 
Dificuldades dos alunos e ações perante essas dificuldades	1. Perceber que a função é descontínua ○ Questiono o que significa o domínio ser $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ 2. Associar o sinal negativo da primeira derivada ao facto de a função original ser decrescente ○ Recordar-lhes que têm uma síntese nas tarefas anteriores que pode ajudar e solicito para algum aluno explicar essas relações 3. Interpretar o limite ○ Solicito a um aluno que informações os limites nos fornecem 4. Interpretar os zeros da função derivada ○ Solicito a um aluno que relembre os restantes do que significam os zeros da função derivada 5. Desenhar a representação gráfica ○ Indico para marcarem as assíntotas e os pontos importantes que já conhecem

Questão 4	5 minutos
Objetivo	Mobilizar conhecimento sobre a paridade de funções.
Estratégias	A função par é a g, porque quando uma função é par, objetos simétricos têm imagens iguais, logo o domínio de uma função par não pode ser $\mathbb{R}\backslash\{1\}$. Neste caso -1 pertence ao domínio e 1 não pertence. Logo a função f não é par nem ímpar.
Dificuldades dos alunos e ações perante essas dificuldades	1. Associar a paridade de uma função à simetria do seu gráfico o Solicito a um colega que relembra

4. Discussão das questões 2, 3 e 4 pelos alunos – 15 minutos: durante a discussão, o papel do aluno é expor e explicar o raciocínio e o papel do professor é orientar, garantir que as intervenções são ordeiras, que existe rigor na linguagem e sintetizar a informação. A discussão será semelhante à da questão 1.
   Como o objetivo das questões 2 e 3 é mobilizar o conhecimento das propriedades de uma função, sem conhecerem a sua expressão analítica e representá-la graficamente, durante a discussão destas duas questões pretendo frisar que existem várias representações que poderão estar corretas, isto é, não existe apenas uma função que satisfaz as propriedades mencionadas. Deste modo, pretendo um exemplo de representação gráfica que verifique o que é pedido e não a única representação gráfica.
   Em relação à questão 4, como esta tem como objetivo mobilizar conhecimentos sobre a paridade de funções, pretendo durante a discussão que os alunos me indiquem o aspeto de um gráfico cuja função seja par e uma cuja função seja ímpar, para eu conseguir perceber se eles percebem a simetria associada aos casos.

Anexo 8 – Tarefa 1

FICHA1 REVISÃO DA PRIMEIRA DERIVADA

A ficha é constituída por 6 itens. Todas as respostas devem ser registadas numa folha à parte. Na resposta a cada um dos itens, apresenta todos os cálculos que tiveres de efetuar e todas as justificações necessárias. Apresenta o teu raciocínio de forma organizada, num texto bem estruturado e linguisticamente correto.

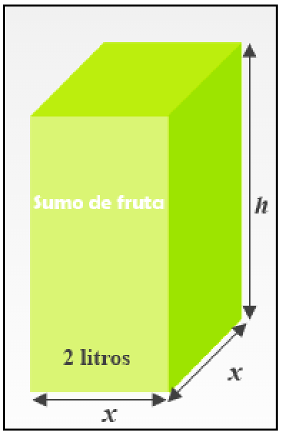
1. Seja f a função definida no intervalo $[10,100]$ pela expressão $f(x)=\frac{\ln(x)-2}{x}$.

(a) Determina a função derivada f'.

(b) Representando x a idade, em anos e $g(x)$ a capacidade pulmonar de um ser humano, em litros, admite-se que $g(x)=110f(x)$. Recorrendo a métodos exclusivamente analíticos, calcula para que idade é máxima a capacidade pulmonar e qual é o valor dessa capacidade pulmonar. Apresenta todos os cálculos que realizares e os resultados nas unidades consideradas, com aproximação às décimas.

2. Uma nova empresa de refrigerantes pretende lançar no mercado embalagens de forma de um prisma quadrangular regular, com capacidade de 2 litros, tal como se ilustra imagem. Por uma questão de economia, a empresa pretende saber quais as dimensões da embalagem, de modo que a sua área total seja mínima.

Apresenta uma expressão para a área do prisma e, recorrendo a processos exclusivamente analíticos, descobre as dimensões da embalagem que cumprem os requisitos da empresa.



3. Nas figuras seguintes, apenas num dos referenciais se encontram representadas duas funções em que uma é a derivada da outra. Indica em qual dos referenciais isso acontece e identifica qual das funções é a original e qual é a derivada. Justifica todos os teus raciocínios.

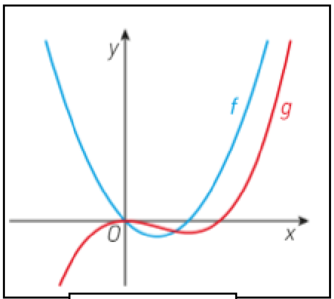


Figura 1

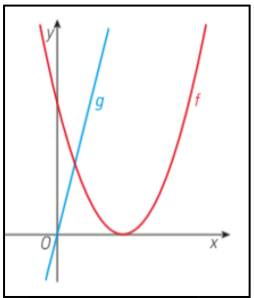
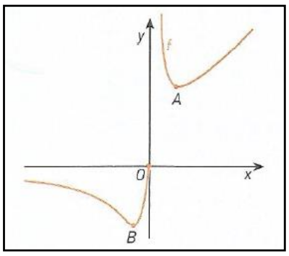


Figura 2

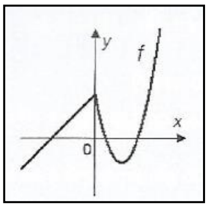
4. No referencial da figura está representada numa função f de domínio $\mathbb{R}$, tal que:

$$f(x) = \begin{cases} xe^{\frac{2}{x}}, se\ x > 0 \\ \dfrac{8x}{x^2+1}, se\ x \leq 0 \end{cases}$$

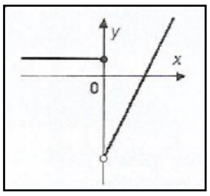


Os pontos A e B são os pontos em que a função toma valores extremos. Determina as coordenadas dos pontos A e B, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

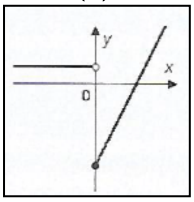
5. A figura apresenta parte do gráfico de uma função f de domínio $\mathbb{R}$. Em qual das figuras seguintes pode estar parte da representação gráfica de f', derivada de f? Justifica a tua resposta.



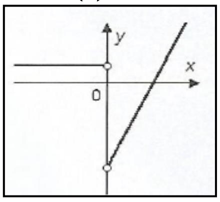
(a)



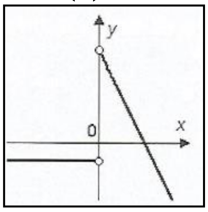
(b)



(c)



(d)



6. Um laboratório farmacêutico lançou no mercado um novo analgésico, o Antidor. A concentração deste medicamento, em decigramas por litro de sangue, t horas após ser administrado a uma pessoa, é dada por $C(t) = t^2 e^{-0,6t}, t \geq 0$. Recorrendo a processos exclusivamente analíticos, indica qual a concentração máxima desse medicamento no sangue, aproximando às décimas e em que instante ocorre (em horas e minutos, arredondados às unidades).

Adaptada de:

Costa, B., Rodrigues, E. (2015). Matemática A 12º ano: *Novo espaço Parte 2.* Porto: Porto editora

Costa, B., Rodrigues, E. (2015). Matemática A 12º ano: *Novo espaço Caderno prático.* Porto: Porto editora

Escola virtual

Matias, L., Vivas, P., Castelo, R. (2010). *Essencial Matemática 12º ano*. Sebenta editora

Jorge, A. Alves, C., Fonseca, G., Barbedo, J. (2005). *Infinito Parte 2 12 A*. Porto: Areal editores

Anexo 9 – Tarefa 2

FICHA2 SEGUNDA DERIVADA

A ficha é constituída por 3 itens. Todas as respostas devem ser registadas numa folha à parte. Na resposta a cada um dos itens, apresenta todos os cálculos que tiveres de efetuar e todas as justificações necessárias. Apresenta o teu raciocínio de forma organizada, num texto bem estruturado e linguisticamente correto.

DEFINIÇÃO DA SEGUNDA DERIVADA

À derivada de f' no ponto $x0$ chama-se segunda derivada ou derivada de segunda ordem de f no ponto $x0$ e representa-se por $f''(x0)$

$$f''(x0) = \lim_{h\to 0} \frac{f'(x0+h) - f'(x0)}{h} = \lim_{x\to x0} \frac{f'(x) - f'(x0)}{x - x0}$$

Desde que o limite exista e seja finito

PROPRIEDADES DA SEGUNDA DERIVADA

Dada uma função f duas vezes derivável num intervalo $]a, b[$, o gráfico de f tem:

- A concavidade voltada para cima se $\forall x \in]a, b[,\ f''(x) > 0$
- A concavidade voltada para baixo se $\forall x \in]a, b[,\ f''(x) < 0$
- Ponto de inflexão $(x, f(x))$ se $f''(x) = 0$

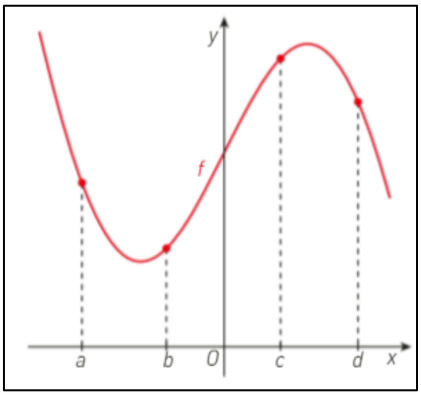
RELAÇÃO DA SEGUNDA DERIVADA COM A PRIMEIRA DERIVADA

Dada uma função f sabe-se que $f'(a) = 0$

- Se $f''(a) < 0$, então a função f tem um máximo para $x = a$
- Se $f''(a) > 0$, então a função f tem um mínimo para $x = a$

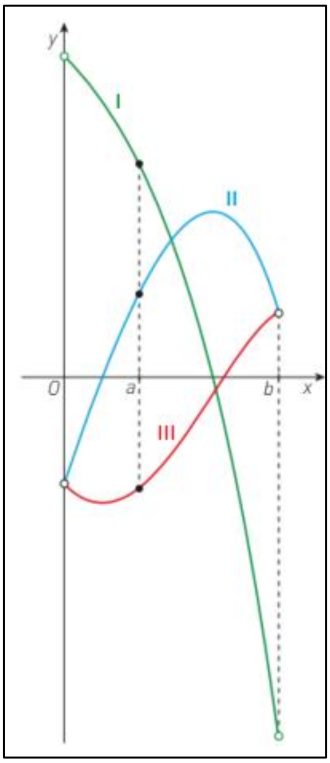
1. Calcule a segunda derivada das seguintes funções, utilizando as regras de derivação:
   a) $f(x) = 4ln^2(x)$
   b) $f(x) = (x-1)5e^x$
   c) $f(x) = x^4 - 2x^3 - 2$
   d) $f(x) = x + 7^{-x}$

2. Na figura está representada uma função f.
   Estão assinalados alguns pontos que pertencem ao gráfico de f. Com base na figura indica, justificando todos os teus raciocínios, se as seguintes expressões são positivas ou negativas:
   a) $f'(a) \times f''(a)$
   b) $f''(b) \times f'(c)$
   c) $f'(b) \times f''(c)$
   d) $f''(c) + f''(d)$



3. No referencial da figura são apresentadas três representações gráficas: I, II e III.

Uma das representações gráficas corresponde a uma função de domínio $]0, b[$ e das outras duas representações, uma corresponde à função f' e a outra à função f''.



3.1. A representação II pode corresponder a f e a representação III a f''? Justifica.

3.2. A representação I pode corresponder a f' e a II a f''? Justifica.

3.3. Estabelece a correspondência correta entre as representações e as funções.

<u>Trabalho de casa</u>

Exercício 135 e 136 (página 97)

Propostas 28 e 29 (página 119)

Adaptada de:
Costa, B., Rodrigues, E. (2015). Matemática A 12º ano: *Novo espaço Parte 2.* Porto: Porto editora

Anexo 10 – Tarefa 3

FICHA3 APLICAÇÃO DA SEGUNDA DERIVADA

A ficha é constituída por 8 itens. Todas as respostas devem ser registadas numa folha à parte. Na resposta a cada um dos itens, apresenta todos os cálculos que tiveres de efetuar e todas as justificações necessárias. Apresenta o teu raciocínio de forma organizada, num texto bem estruturado e linguisticamente correto.

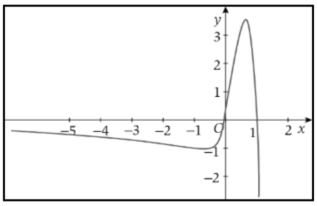
PROPRIEDADES DA SEGUNDA DERIVADA

Dada uma função f duas vezes derivável num intervalo $]a, b[$, o gráfico de f tem:

- A concavidade voltada para cima se $\forall x \in]a, b[,\ f''(x) > 0$
- A concavidade voltada para baixo se $\forall x \in]a, b[,\ f''(x) < 0$
- Ponto de inflexão $(x, f(x))$ se $f''(x) = 0$

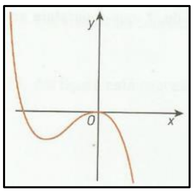
1. Estuda o sentido das concavidades e os pontos de inflexão do gráfico de f, sendo:
   a) $f(x) = ln^2(x)$
   b) $f(x) = (x-1)e^x$
   c) $f(x) = x^4 - 2x^3 - 2$
   d) $f(x) = x + 2^{-x}$

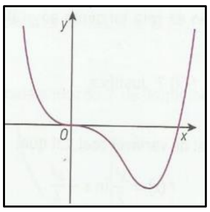
2. Na figura, está representada, num referencial o. n. Oxy, parte do gráfico de uma função f, de domínio ℝ. Sejam f' e f'', de domínio ℝ, a primeira derivada e a segunda derivada de f, respetivamente. Qual dos valores seguintes pode ser positivo? Justifica a tua resposta
   a) $f'(1)$
   b) $f'(-3)$
   c) $f''(-1)$
   d) $f''(1)$

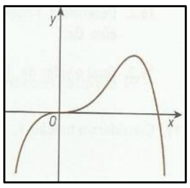


3. A função g'', segunda derivada da função g, é definida por $g''(x) = x^2 - 2x$.

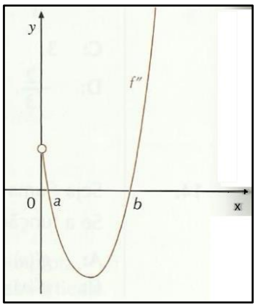
Qual dos gráficos seguintes pode corresponder ao gráfico da função g? Justifica todos os teus raciocínios.

a) 

b) 

c) 

4. No referencial da figura está representada a função f'', segunda derivada de uma função f de domínio $\mathbb{R}^+$. Indica se as afirmações são verdadeiras ou falsas, justificando.



a) O gráfico da função f não tem pontos de inflexão.
b) No intervalo $]a, b[$, o gráfico da função f tem um ponto de inflexão.
c) No intervalo $]0, a[$, o gráfico da função f tem concavidade voltada para cima.

5. De uma função f sabe-se que:
   - O seu domínio é $\mathbb{R}$;
   - A sua derivada é dada por $f'(x) = \ln(x^2+1) - \frac{5x^2}{x^2+1}$.

   5.1. Determina, recorrendo à calculadora gráfica, a abcissa dos extremos de f.

   Na tua resposta, deves, explicando todos os teus raciocínios:
   - Equacionar o problema;
   - Reproduzir e identificar o(s) gráfico(s) que tiveres necessidade de visualizar na calculadora para resolver o problema;
   - Assinalar os pontos relevantes para a resolução do problema;
   - Apresentar, com aproximação às unidades, as abcissas dos pontos do gráfico correspondentes aos extremos.

   5.2. Sem recurso à calculadora, estuda agora a concavidade do gráfico de f e a existência de pontos de inflexão

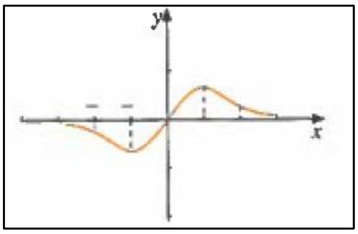
<u>Extensão da tarefa</u>

6. Seja f a função de domínio $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x^2 - e^{-\frac{x}{2}}$. Verifica se o gráfico da função f tem pontos de inflexão e caso tenha, determina-os.

7. Seja f a função de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = xe^{1-x^2}$.

   Mostra que $f''(x) = (4x^3 - 6x)e^{1-x^2}$ e estuda o sentido da concavidade e a existência de pontos de inflexão do gráfico de f.

8. Na figura seguinte está representada parte do gráfico de uma função f de domínio $\mathbb{R}$.



Em cada uma das figuras abaixo está representada parte do gráfico da função f' e parte do gráfico f''. Numa pequena composição indica qual das figuras corresponde à primeira derivada de f e qual corresponde à segunda derivada, justificando o teu raciocínio.

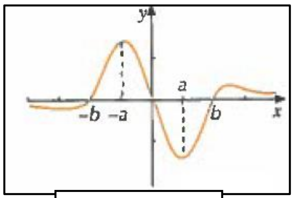


Figura 1

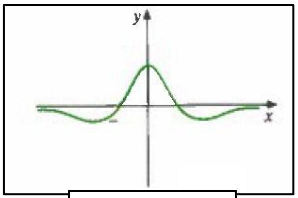


Figura 2

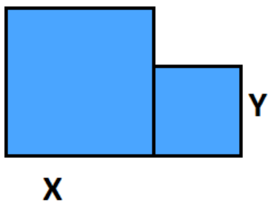
Adaptada de:
Costa, B., Rodrigues, E. (2015). Matemática A 12º ano: *Novo espaço Parte 2.* Porto: Porto editora
Costa, B., Rodrigues, E. (2015). Matemática A 12º ano: *Novo espaço Caderno prático.* Porto: Porto editora
Costa, B., Resende, L., Rodrigues, E. (2010). Matemática A: *Espaço 12.* Lisboa: Asa
Escola virtual

Anexo 11 – Tarefa 4

FICHA4 PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO

A ficha é constituída por 6 itens. Todas as respostas devem ser registadas numa folha à parte. Na resposta a cada um dos itens, apresenta todos os cálculos que tiveres de efetuar e todas as justificações necessárias. Apresenta o teu raciocínio de forma organizada, num texto bem estruturado e linguisticamente correto.

1. A câmara munincipal pretende fazer obras numa piscina pública quadrangular com 120 metros de perímetro, para construir uma zona para as crianças. Atendendo às dificuldades financeiras atuais, a câmara teve necessidade de reutilizar a mesma cerca para separar as duas zonas, como é sugerido na figura abaixo, de modo a ocupar a menor área possível de terreno.



Encontra uma expressão para a área desta nova construção e determina as dimensões de cada uma das novas zonas quadradas.

2. Num certo dia, a Diana esteve doente e tomou, às 9 horas da manhã, um medicamento cuja concentração $C(t)$ no sangue, em mg/L, t horas após o medicamento ter sido administrado, é dada por $C(t) = 2te^{-0,3t}$ $(t \geq 0)$.

Resolve, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos, os itens seguintes:

2.1. Qual a concentração do medicamento no sangue às 13 horas?

2.2. Calcula $\lim\limits_{t\to+\infty} C(t)$ e interpreta esse valor no contexto da situação apresentada.

2.3. Estuda a função $C(t)$ quanto ao sentido das concavidades e existência de pontos de inflexão.

2.4. Determina a que horas se verificou a concentração máxima do medicamento no sangue. Apresenta o resultado em horas e minutos, arredondando estes às unidades.

3. Numa fábrica, a partir das 8 horas e até às 18 horas, um reservatório de forma cúbica, com 1 metro de altura, fornece água a uma máquina e recebe água continuamente de uma torneira de caudal constante.

Admite que, num determinado dia, a altura, em centímetros, da água no reservatório, t horas após o início do fornecimento, é dada por $h(t) = 30 + 2t + 5\ln\left(\frac{1}{(t+1)^2}\right), 0 \leq t \leq 10$. Resolve, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos, os três itens seguintes.

3.1. Em que período(s) do dia a quantidade de água que está a entrar no reservatório é superior ou igual à quantidade de água que está a sair?

3.2. Quantos litros de água contém o reservatório quando esta atinge a altura mínima?

3.3. Estuda a função $h(t)$ quanto ao sentido das concavidades e existência de pontos de inflexão.

4. Numa certa zona de cultivo, foi detetada uma doença que atinge as culturas. A área afetada pela doença começou por alastrar durante algum tempo, tendo depois começado a diminuir.

Admite que a área, em hectares, afetada pela doença, é dada em função de t por

$$A(t) = 2 - t + 5\ln(t + 1)$$

sendo $t (0 \leq t < 16)$ o tempo, em semanas, decorridos após ter sido detetada essa doença. Resolve, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos, os dois itens seguintes.

4.1. Quando a doença foi detetada, já uma parte da área de cultivo estava afetada. Passada uma semana, a área de cultivo afetada pela doença aumentou. De quanto foi esse aumento?

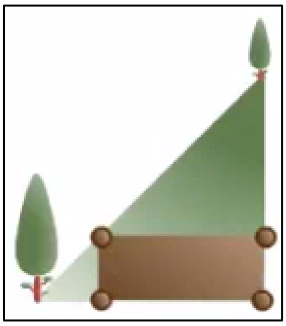
4.2. Determina a área máxima afetada pela doença. Apresenta o resultado em hectares, arredondado às centésimas.

Extensão da tarefa

5. A temperatura, em graus Célsius, ao longo de um determinado dia, no deserto do Atacama, é dada, em função da hora t, por $S(t) = (4t - 0{,}16t^2)e^{0{,}04t}, t \in [0,24]$.

Determina, analiticamente, a temperatura máxima verificada nesse dia (arredondando o resultado às unidades) e o instante (em horas e minutos) que tal ocorreu.

6. Considera um jardim com a forma de um triângulo retângulo, em que cada cateto medo 10 metros. Vai ser construído um canteiro de forma retangular, em que um dos vértices desse retângulo pertence à hipotenusa e os restantes pertencem aos catetos, como é sugerido na figura.



Qual a expressão que nos indica a área deste canteiro? E que dimensões deverá ter o canteiro para que a sua área seja máxima?

Adaptada de:

Costa, B., Rodrigues, E. (2015). Matemática A 12º ano: *Novo espaço Parte 2.* Porto: Porto editora

Costa, B., Rodrigues, E. (2015). Matemática A 12º ano: *Novo espaço Caderno prático.* Porto: Porto editora

Costa, B., Resende, L., Rodrigues, E. (2010). Matemática A: *Espaço 12.* Lisboa: Asa

Escola virtual

Matias, L., Vivas, P., Castelo, R. (2010). Essencial Matemática 12º ano. Sebenta editora

Anexo 12 – Tarefa 5

FICHA5 ESTUDO DE FUNÇÕES

A ficha é constituída por 4 itens. Todas as respostas devem ser registadas numa folha à parte. Na resposta a cada um dos itens, apresenta todos os cálculos que tiveres de efetuar e todas as justificações necessárias. Apresenta o teu raciocínio de forma organizada, num texto bem estruturado e linguisticamente correto.

No estudo de uma função devem-se considerar os seguintes aspetos:

- Domínio
- Paridade (se for par ou ímpar, atendendo à simetria do gráfico da função, o estudo pode ser feito apenas numa parte do domínio)
- Existência de assíntotas
- Pontos de interseção do gráfico com os eixos coordenados
- Estudo do sinal da 1ª derivada (quadro de variação, intervalos de monotonia e extremos)
- Estudo do sinal da 2ª derivada (quadro de sinal, concavidades e pontos de inflexão)
- Contradomínio
- Representação gráfica

1. Estuda e representa graficamente, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos, as seguintes funções:

   a) $f(x) = \frac{x^2 - x}{2 - x}$, b) $g(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$, c) $h(x) = xe^x - e^x$

2. Relativamente à função f sabe-se que:

   - $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$
   - $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -4$
   - satisfaz a seguinte tabela

x	$-\infty$	-1		4	$+\infty$
f'	$+$	0	$-$	0	$+$
f		3		-2	

   2.1. Completa os espaços em branco da tabela, indicando a monotonia da função f.

   2.2. Esboça um possível gráfico de f, justificando o teu raciocínio

3. Esboça um possível gráfico da função f, justificando o teu raciocínio, sabendo que tem domínio $\mathbb{R}\setminus\{1\}$, $f'(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{1,3\}$, $f'(3) = 0$, $x = 1$ é assíntota, $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 2$.

4. Os domínios de duas funções f e g são, respetivamente, $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ e $\mathbb{R}\setminus\{-2,2\}$. Sabe-se que uma das funções é par e a outra não é par nem ímpar. Qual delas é a função par? Justifica o teu raciocínio.

Adaptada de:
Costa, B., Rodrigues, E. (2015). Matemática A 12º ano: *Novo espaço Parte 2.* Porto: Porto edito